Carolina Maria de Almeida Moreira

Licenciada em Matemática Aplicada

Relatório de Estágio

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3ºCiclo do Ensino Básico e Secundário

Orientador: Doutor António Domingos, Professor Auxiliar

Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Licenciada Rosário Lopes, Professora

Escola Secundária António Gedeão

Júri:

Presidente: Professora Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha

Vogais: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos

Professora Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

julho de 2016

Carolina Maria de Almeida Moreira

Licenciada em Matemática Aplicada

Relatório de Estágio

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3ºCiclo do Ensino Básico e Secundário

Orientador: Doutor António Domingos, Professor Auxiliar

Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Licenciada Rosário Lopes, Professora

Escola Secundária António Gedeão

Júri:

Presidente: Professora Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha

Vogais: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos

Professora Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

julho de 2016

Relatório de Estágio

À Mãe. Ao Pai. Ao Mano.

Agradecimentos

À minha família pelo apoio incondicional. À mãe que me mima. Ao pai que também me mima. Aos dois porque que estão sempre, sempre presentes. Ao mano, que mesmo longe, também está presente. À bisavó. À avó. À outra avó. Ao avô. A todos.

Aos professores que me acompanharam neste percurso. Um agradecimento especial ao Professor António Domingos pela sua incansável paciência. À Professora Maria Helena Santos, à Professora Helena Rocha e ao Professor Filipe Ramos pela constante preocupação com o decorrer do meu trabalho.

À orientadora de estágio, Professora Rosário Lopes, por tudo o que com ela aprendi e que levo para o meu futuro.

Aos meus amigos, que não vou nomear. Às minhas amigas, que também não vou nomear. Especialmente aos que aturam o meu mau feitio – esses certamente saberão quem são.

Às Professoras Manuela Costa, Carlota Gil e Sílvia Santos que me apaixonaram pela matemática.

Ao resto da minha turma: a Sílvia Lopes.

A todos os alunos da turma na qual realizei o estágio pedagógico e sem o quais esta experiência não teria sido possível. Por toda a preocupação e carinho transmitido. Um agradecimento especial à Benedita, ao Martim, à Matilde, ao Salvador e ao Santiago por toda a disponibilidade para colaborar.

Resumo

O presente trabalho divide-se em duas partes. Numa primeira parte apresenta-se o relatório realizado no âmbito do Estágio Pedagógico supervisionado feito numa turma de 10º ano, na disciplina de Matemática A. Neste relatório é apresentada uma breve caraterização do ambiente onde se desenvolveu o estágio e são descritas as atividades desenvolvidas pela professora estagiária ao longo do ano letivo.

Na segunda parte é apresentado o trabalho de investigação desenvolvido, que teve por objetivo analisar a compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos de lógica estudados no 10º ano de escolaridade. Com a revisão de literatura pretendeu-se estabelecer o estado da arte sobre o tema, nomeadamente discutir as questões relacionadas com a compreensão em matemática e a caracterização de algumas teorias cognitivas presentes no ensino e aprendizagem da matemática, criando um quadro teórico que suporte o estudo.

O estudo seguiu uma metodologia de índole qualitativa tendo-se optado pelo estudo de caso. As técnicas de recolha de dados foram a entrevista semiestruturada com recurso a tarefas, a análise documental e a observação.

Os resultados obtidos permitem concluir que alguns alunos apresentam um défice na compreensão dos conceitos e consequentemente revelam dificuldades na sua utilização. O uso da linguagem natural revela-se complexo quando as proposições envolvem vários operadores e o recurso à linguagem simbólica vem agilizar esse processo. A manipulação simbólica é realizada com alguma destreza pelos alunos, mas a utilização das propriedades conduz os alunos à manifestação de uma compreensão instrumental. Os conceitos e propriedades mais elementares são em grande parte reificados, o mesmo não acontecendo na concretização de situações mais complexas.

Por outro lado, mesmo os alunos que apresentam um desempenho bom na avaliação sumativa revelam algumas lacunas no domínio dos processos e procedimentos necessários à reificação dos conceitos em estudo.

Palavras-Chave: compreensão, conceito imagem, lógica simbólica, lógica matemática

Abstract

The present work is divided in two parts. In a first part is presented a report realized within a supervised teaching practice carried out in a 10th grade class, in math discipline. This report presents a brief characterization of the environment where the teaching practice was developed and are described the activities of the trainee teacher throughout the year.

In the second part is presented the research work developed, which objective was to analyse the understanding, by the students, about logical concepts studied in the 10th grade. With the literature review was intended to establish the state of the art on the subject, particularly to discuss the issues related to the understanding in math and the characterization of some cognitive theories present in the teaching and learning of mathematics, creating a theoretical framework that supports the study.

The study followed a qualitative methodology based in a case study. The data collection was based on semi-structured interviews with recourse to tasks, the document analysis and observation.

The main results showed that some students have a deficit in understanding of the concepts and therefore have difficulties in their use. The use of natural language is revealed complex when propositions involve multiple operators and the use of symbolic language comes to expedite this process. Symbolic manipulation is done with some skill by the students, but the use of the properties leads students to the demonstration of an instrumental understanding. The most basic concepts and properties are largely reified but this is not happening in implementing more complex situations.

On the other hand, even students who perform well in the summative assessment reveals some gaps in the field of processes and procedures necessary for the reification of the concepts under study.

Keywords: understanding, image concept, symbolic logic, mathematical logic

Índice

Índice de Figuras

Índice de Gráficos

Índice de Tabelas

PARTE I – RELATÓRIO DE ESTÁGIO

1. Caraterização do concelho

Almada localiza-se na margem esquerda do rio Tejo, no distrito de Setúbal. O concelho faz fronteira com os concelhos do Seixal (a Este) e de Sesimbra (a Sul) e com o Oceano Atlântico (a Oeste). Em 2011, segundo o Censos realizado nesse ano, a população do concelho era de 174 030 habitantes e as áreas urbanas encontravam-se mais envelhecidas do que as freguesias com características mais rurais.

Com uma área de $71Km^2$, o concelho possui 10 parques urbanos e 41 jardins públicos. Na área do desporto, existem complexos municipais de piscinas, pavilhões municipais, campos de ténis e de golfe, um estádio municipal e um hipódromo municipal. Há no concelho cerca de 120 clubes e coletividades com modalidades desportivas.

No âmbito da educação, no sítio *online* apenas se encontra informação relativamente ao ano letivo de 2013/2014. Não foi possível obter informações relativamente ao presente ano letivo, apesar das diversas tentativas de contacto com o Departamento de Educação e Juventude da Câmara Municipal de Almada. Assim, optou-se por não se apresentar esta informação.

2. Caraterização do Agrupamento e da Escola

No presente capítulo faz-se uma breve caraterização do agrupamento e da escola na qual foi realizado o estágio pedagógico. Apresenta-se a estrutura deste, a oferta educativa, a distribuição dos alunos no agrupamento e na escola bem com os princípios orientadores e as metas de referência.

> *"O Agrupamento de Escolas António Gedeão pretende a formação integral dos alunos que o frequentam, tornando-os cidadãos de excelência, conscientes, críticos e preparados para os desafios do futuro."*

Projeto Educativo 2016-2018, p.10

2.1. António Gedeão

Rómulo de Carvalho nasceu a 24 de novembro de 1906, em Lisboa. Em 1952 iniciou a publicação de uma coleção de livros de divulgação e, quatro anos mais tarde, publicou o seu primeiro livro de poesia *Movimento Perpétuo*, com o pseudónimo de António Gedeão.

Assim, António Gedeão "nasceu" quando Rómulo de Carvalho já tinha cinquenta anos e constituiu-se uma personalidade autónoma com uma existência paralela à do professor de Física e Química.

Enquanto professor, Rómulo de Carvalho apresentava-se aos jovens com a vivacidade que lhe permitia utilizar os objetos mais insignificantes que o rodeavam para lhes cativar a atenção e desencadear o gosto pelo saber.

Faleceu a 19 de fevereiro de 1997, na cidade de Lisboa.

2.2. Estrutura do Agrupamento

O Agrupamento de Escolas António Gedeão foi constituído em abril de 2014 e é composto por seis estabelecimentos:

- Escola Secundária António Gedeão (sede de agrupamento) – 3º ciclo e secundário;
- Escola Básica Comandante Conceição e Silva – 2º ciclo;
- Escola Básica do Alfeite – Pré-Escolar e 1º ciclo;
- Escola Básica nº 1 da Cova da Piedade – Pré-Escolar e 1º ciclo;

- Escola Básica nº 2 da Cova da Piedade – 1º ciclo;
- Escola Básica nº 3 do Laranjeiro – Pré-Escolar e 1º ciclo + UEE[1] 1º ciclo.

O Agrupamento situa-se nas atuais União de Freguesias Laranjeiro – Feijó e União das freguesias da Cova da Piedade, Almada, Pragal e Cacilhas, no concelho de Almada, distrito de Setúbal.

Frequentam este agrupamento cerca de 2300 alunos, predominantemente da classe média, relativamente aos agregados familiares e a maioria dos pais e mães frequentou o 3º ciclo ou o ensino secundário.

2.3. Oferta Educativa

Relativamente ao Ensino Regular, no Ensino Básico, o agrupamento tem turmas de todos os anos de ensino (desde o 1º ao 9º) e, no Ensino Secundário, disponibiliza os Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas e Línguas e Humanidades, nos três anos de escolaridade (10º ao 12º ano).

No 3º ciclo disponibiliza ainda os Cursos Vocacionais de Tecnologias e Ofícios (1 ano) e de Artes e Tecnologias (2 anos). No Ensino Secundário, disponibiliza os cursos Profissionais de Técnico de Turismo (TT), Técnico de Animação Sociocultural (TASC) e Técnico de Apoio à Infância (TAI), todos de nível III (equivalência ao 12º ano).

2.4. Número de alunos

A distribuição do número de alunos por ciclo de estudos e via de ensino, no agrupamento e no presente ano letivo, pode ser analisado na tabela 1, que se apresenta de seguida.

Tabela 1 - Distribuição do número de alunos por ciclo, no Agrupamento

Nível de Escolaridade	**Nº alunos 2015/16**
UEE	11
Pré-Escolar	184

[1] Unidade de Ensino Estruturado – Espectro do Autismo

1º Ciclo	860
2º Ciclo	406
3º Ciclo Regular	423
3º Ciclo Vocacional	47
Ensino Secundário Regular	300
Ensino Secundário Profissional	72

Dos cerca de 2300 alunos do agrupamento fazem parte da escola onde se realizou o estágio pedagógico 842 alunos. Na tabela 2 apresenta-se a distribuição por ciclo de estudos e via de ensino.

Tabela 2 - Distribuição do número de alunos na Escola

Nível de Escolaridade		**Nº alunos 2015/16**
3º Ciclo Regular	7ºano	172
	8ºano	126
	9ºano	125
3º Ciclo Vocacional	Voc. 1	27
	Voc. 2	20
Ensino Secundário Regular	10ºano	102
	11ºano	91
	12ºano	107
Ensino Secundário Profissional	TT	25
	TAI 1	16
	TAI 2	16
	TASC	15

2.5. Princípios Orientadores e Objetivos (Regulamento Interno 2014/2018)

Os objetivos para o quadriénio 2014-2018 podem ser encontrados no Regulamento Interno, que está em vigor desde o ano letivo anterior, e até 2018. Enumeram-se, de seguida, esses os objetivos.

- Promover o sucesso e prevenir o abandono escolar dos alunos;
- Promover a equidade social;
- Promover o mérito e a disciplina e contribuir para o desenvolvimento de uma cultura de cidadania;
- Assegurar as melhores condições de estudo e de trabalho;
- Cumprir e fazer cumprir os direitos e os deveres constantes das leis;
- Observar o primado dos critérios de natureza pedagógica sobre os critérios de natureza administrativa nos limites de uma gestão eficiente dos recursos disponíveis para o desenvolvimento da sua missão;
- Assegurar a estabilidade e a transparência da gestão e administração escolar;
- Proporcionar condições para a participação dos membros da comunidade educativa e promover a sua iniciativa;
- Assegurar o património das escolas do Agrupamento.

2.6. Metas de Referência (Projeto Educativo 2016/2019)

No Projeto Educativo para o triénio 2016/2019 estão definidas as metas que se pretendem alcançar, no período de vigência deste, relativamente à prestação de serviços educativos, aos resultados escolares, à organização e gestão de recursos do Agrupamento e à liderança. No projeto apresentam-se ainda os objetivos relativos a cada um destes tópicos. Algumas das metas são:

- Diversificar uma oferta formativa coerente e de qualidade de forma a promover a procura do Agrupamento;
- Promover uma melhor articulação/sequencialidade entre os níveis/ciclos de ensino;
- Aumentar os níveis de sucesso nas disciplinas sujeitas a exame para valores iguais ou superiores à média nacional: 3º Ciclo$\geq$ 3; Secundário $\geq$ 10;

- Diminuir o abandono escolar para 0% a partir das taxas de abandono escolar do ano letivo anterior;
- Garantir uma articulação coerente entre os diferentes documentos orientadores em prol da manutenção das linhas estratégicas da política educativa do Agrupamento;
- Reforçar a cooperação com parceiros da comunidade envolvente.

Dos objetivos constantes no Projeto Educativo destacam-se os seguintes:

- Aumentar a diversidade de cursos científico-humanísticos e saídas profissionalizantes;
- Proporcionar respostas adequadas as necessidades educativas de todos os alunos, independentemente do grau e natureza;
- Aumentar a média das classificações internas e das classificações de exame;
- Reduzir as retenções e reprovações;
- Prevenir o abandono escolar.

3. Caraterização da turma

No presente capítulo faz-se uma breve caraterização da turma de 10º ano onde se desenvolveu a maioria do trabalho o realizado no âmbito do estágio pedagógico.

No início do ano letivo, a turma era composta por 27 alunos tendo terminado o ano com 25 alunos (21 rapazes e 4 raparigas), após diversas mudanças de turma/escola. Todos os alunos da turma frequentaram o 10º ano pela primeira vez.

A caraterização da turma que aqui se apresenta foi baseada nas informações relativas aos alunos que integravam a turma no início do terceiro período, data em que esta caraterização foi realizada. As informações relativamente à freguesia de morada, idades e classificações obtidas na disciplina de Matemática no 9º ano foram recolhidos dos processos dos alunos e as classificações na disciplina de Matemática no 10º ano foram disponibilizadas pela professora da turma.

As idades dos alunos da turma situam-se nos 15 e nos 16 anos (gráfico 1) e apenas dois alunos reprovaram em ciclos anteriores.

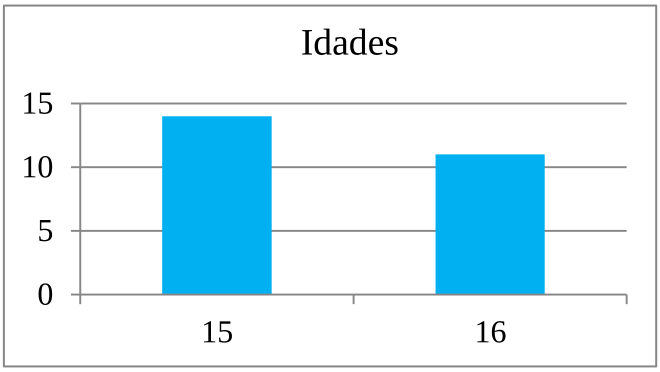


Gráfico 1 – Distribuição das idades dos alunos da turma

Relativamente à freguesia de morada, praticamente todos os alunos moram na proximidade da escola, como se pode constatar no gráfico 2.

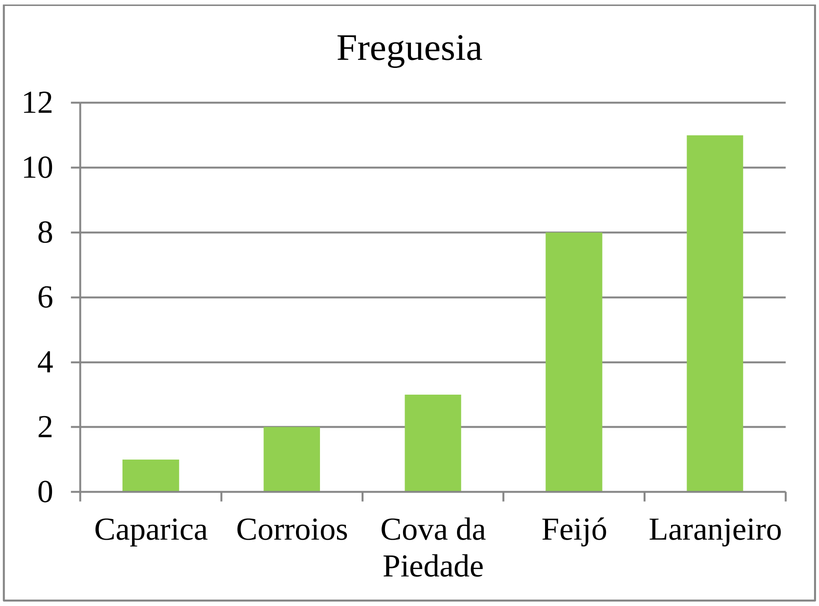


Gráfico 2 - Distribuição das freguesias de morada dos alunos da turma

No que diz respeito às classificações obtidas na disciplina de Matemática, no 9º ano, a média foi de 3,36 no final do 3º Período, baixando no Exame Nacional para 2,79. Não obstante esta variação, as notas finais não sofreram alteração relativamente à avaliação antes do Exame Nacional. A distribuição das notas que dão origem a estas médias pode ser analisada no gráfico 3.

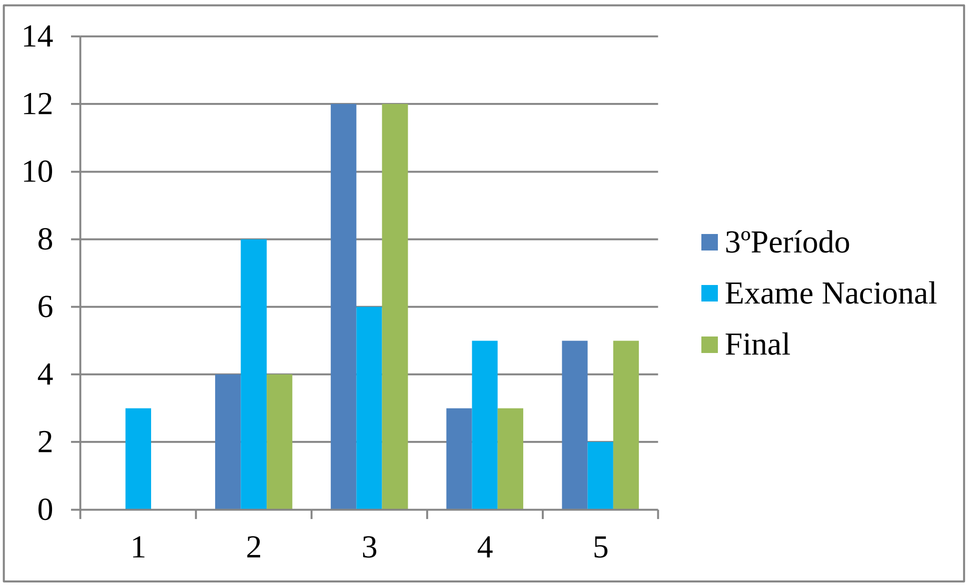


Gráfico 3 – Notas obtidas pelos alunos no 9º ano (ano letivo 2014/2015)

No 10º ano, a média das classificações dos alunos foi 10,08 (classificações entre 4 e 18) no primeiro período, 9,92 (classificações entre 4 e 19) no segundo período e 9,64 (classificações entre 2 e 20) no terceiro período.

A variação do número de negativas/positivas nos três períodos pode ser observada no gráfico 4. Todos os alunos mantiveram a positiva ou negativa nos três períodos. Note-se que no segundo período integrou na turma um novo aluno, com nota negativa, o que contribuiu para a descida da média da turma.

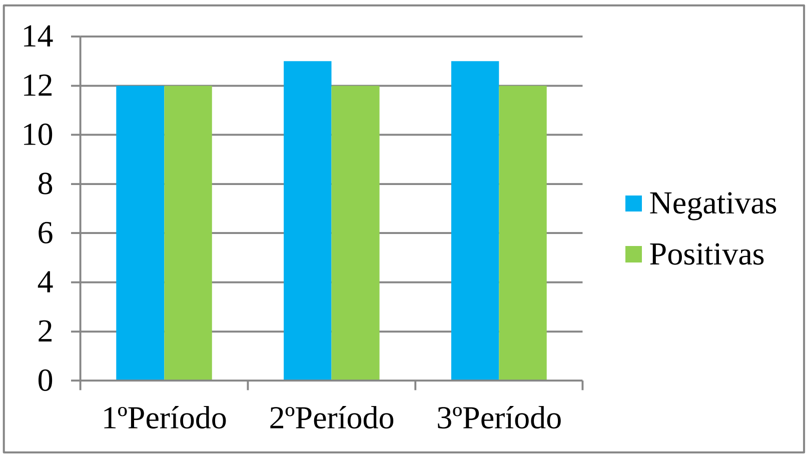


Gráfico 4 – Distribuição das negativas/positivas dos alunos da turma, por período

4. Trabalho realizado com a turma de 10º ano

No presente capítulo faz-se uma descrição do trabalho realizado com a turma. Aqui são descritas as aulas lecionadas pela professora estagiária ao longo do ano, bem com a participação na correção, criação e aplicação de critérios de classificação de alguns instrumentos de avaliação. Num último subcapítulo faz-se uma descrição e reflexão do trabalho desenvolvido no âmbito da direção de turma.

4.1. Aulas Lecionadas

As aulas lecionadas na turma de 10º ano pela professora estagiária foram todas assistidas pela orientadora de estágio, professora Rosário Lopes e apenas algumas foram assistidas, também, pela professora Doutora Maria Helena Santos da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

4.1.1. 1º Período

No primeiro período foram planificadas e lecionadas três aulas. As duas primeiras foram assistidas apenas pela orientadora de estágio, professora Rosário Lopes, e a terceira foi assistida, também, pela professora Doutora Maria Helena Santos.

4.1.1.1. Aula 1 – 08/10/2015 – Operações com Conjuntos

A primeira aula lecionada na turma de 10º ano ocorreu no primeiro período, no dia 8 de outubro. Nesta aula foram lecionadas as operações com conjuntos, integrantes do tema Lógica e Teoria de Conjuntos, primeiro tema do programa de Matemática A.

A matéria lecionada nesta aula já era, praticamente toda, do conhecimento dos alunos pois as operações com conjuntos já tinham sido estudadas no 9º ano. No entanto, a diferença de conjuntos era desconhecida dos alunos.

No início da aula, quando a professora estagiária pediu aos alunos exemplos de conjuntos, estes mostraram-se participativos e fizeram intervenções pertinentes na medida em que foram apresentando exemplos muito diversificados. Um dos alunos respondeu “Entre um e dois”. Até então, nenhum intervalo tinha sido mencionado. A pedido da professora orientadora o aluno foi ao quadro escrever, na forma de conjunto, o que tinha dito e o aluno escreveu $\{x \in \mathbb{R}: x > 1 \wedge x < 2\}$. Quando questionado sobre outra forma para a representação desse mesmo conjunto o aluno referiu que poderia ser na forma de intervalo. Com isto, a professora estagiária aproveitou para referir que os conjuntos, com que iriam trabalhar, podem ter um número finito ou infinito de elementos.

Dos aspetos positivos da aula destaca-se o facto de os alunos se revelarem colaborativos, e com participações pertinentes pois sempre que a professora colocou questões à turma obteve resposta. Outro aspeto positivo foi o facto de a professora estagiária ter conseguido manter o quadro organizado com sistematizações que facilitassem a compreensão pelos alunos e permitindo-lhes a cópia organizada para o caderno.

Os alunos já conheciam a união, a interseção e a inclusão de conjuntos o que permitiu à professora estagiária avançar mais celeremente nesta parte da aula. No entanto, não conheciam a diferença de conjuntos e, neste tópico, a professora teve algumas dificuldades em conseguir que os alunos compreendessem a operação por recorrer apenas a exemplos com intervalos. Com auxílio da professora orientadora, e recorrendo a conjuntos finitos com representações pictóricas, foi mais fácil conseguir que os alunos compreendessem o conceito. Depois de compreenderem o conceito de diferença de conjuntos, foi mais fácil conseguir que compreendessem, também, o conceito de conjunto complementar.

Por falta de tempo, o conceito de conjunto complementar não foi totalmente explorado. No entanto, a professora estagiária não considerou que fosse um ponto essencial da aula pois os conteúdos lecionados seriam suficiente para que os alunos pudessem resolver os exercícios que havia selecionado para essa aula. A falta de tempo também não permitiu que os alunos realizassem o exercício proposto pela professora estagiária, mas tal como estava previsto no plano de aula, foi proposto como trabalho de casa para a aula seguinte.

No final da aula a professora orientadora fez algumas observações e comentários à aula. O principal comentário tecido foi relativamente aos exemplos que a professora estagiária apresentou – poucos exemplos e recorrendo escassamente a conjuntos na forma de intervalo uma vez que estes já eram conhecidos dos alunos. De facto, dar mais atenção aos conjuntos na forma de intervalo deveria ter sido uma das opções da professora estagiária, pois os alunos, neste ano de escolaridade, iriam acabar por trabalhar mais com este tipo de conjuntos do que com conjuntos finitos contribuindo também para consolidar conhecimentos do 9º ano de escolaridade.

4.1.1.2. Aula 2 – 05/11/2015 – Racionalização de Denominadores

A segunda aula lecionada na turma de 10º ano ocorreu no dia 5 de novembro. Nesta aula foi lecionada a racionalização de denominadores. A aula foi planificada para 50 minutos. No entanto, na impossibilidade de cumprir a planificação no tempo previsto, a professora estagiária leccionou o bloco completo (100 minutos).

Os alunos revelaram-se participativos, respondendo às questões colocadas pela professora estagiária, contribuindo com exemplos e apresentando sistematicamente as suas dúvidas. O quadro manteve-se organizado durante o decorrer da aula.

A professora estagiária começou por explorar um número significativo de exemplos concretos e posteriormente apresentar a generalização. Durante as explicações os alunos estiveram preocupados em passar todas as informações para o caderno; diversas vezes a professora teve de aguardar que os alunos passassem, para poder continuar.

O início da aula, tal como estava planificado, foi adiada por existir a necessidade de esclarecimento sobre o conceito de frações equivalentes. Foi feita uma breve revisão sobre o assunto e os alunos disseram ter compreendido e ter ficado esclarecidos. No resto da aula não houve necessidade de voltar a rever o assunto, tendo os alunos ficado elucidados relativamente ao facto de quando se multiplica uma fração por uma do tipo $\frac{a}{a}$, $(a \neq 0)$ esta se mantém equivalente à inicial.

Durante a exposição dos conteúdos os alunos não manifestaram dificuldades na compreensão dos mesmos. No entanto, na fase de resolução dos exercícios alguns alunos revelaram dificuldades na sua aplicação.

Um caso concreto foi o de um aluno que, depois da professora estagiária ter apresentado um primeiro exemplo $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, se manifestou dizendo que não tinha compreendido. A professora estagiária apresentou um novo exemplo (diferente do que tinha na planificação) mas voltou a usar $\sqrt{3}$ no denominador. O aluno disse que já tinha compreendido e foi-lhe apresentado um novo exemplo com um denominador diferente de $\sqrt{3}$. A resposta do aluno foi que teria de multiplicar por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. Foi-lhe explicado que o artifício a usar deveria ser tal que eliminasse o irracional do denominador. Mais uma vez, o aluno disse ter compreendido. Na fase de resolução de exercícios a professora orientadora pediu ao aluno que resolvesse a primeira alínea, isto é, que racionalizasse o denominador da fração $\frac{5}{\sqrt{2}}$ por ter considerado que o aluno realmente tinha compreendido mas este não foi capaz de a resolver, querendo alterar o radicando de 2 para 3.

A turma apresentava uma grande heterogeneidade existindo alunos com muitas dificuldades. Alguns destes alunos têm um percurso de insucesso na disciplina desde o 2º ciclo o que condicionou muito o desenvolvimento da aula. Da mesma forma que este aluno apresentou esta dificuldade, é possível que outros alunos também possam ter sentido esta ou outras dificuldades, no entanto, nenhum se manifestou pedindo esclarecimentos.

Para dar aos alunos a possibilidade de aplicarem os conteúdos lecionados, a professora estagiária optou por não fazer a generalização do último caso. A resolução foi feita pelos alunos no quadro permitindo que a correção fosse realizada de imediato.

4.1.1.3. Aula 3 – 12/11/2015 – Polinómios

A terceira aula lecionada na turma de 10º ano ocorreu no dia 12 de novembro. Nesta aula foram lecionadas as operações com polinómios.

Quando solicitada a participação dos alunos estes corresponderam tendo contribuído com diversos exemplos. Não foi necessário despender muito tempo com a explicação das operações de adição, subtração e produto pois os alunos já as conheciam.

Nesta aula a professora estagiária revelou-se mais nervosa que o habitual e andou muito perdida com a informação que tinha no quadro. Isto deveu-se ao facto de quando foram pedidos exemplos, um aluno ter apresentado como exemplo de um polinómio a expressão $\frac{x+x^2}{x^4}$. A professora estagiária estava a analisar o grau de cada um dos polinómios que os alunos tinham dito e estava à espera de chegar a este caso para questionar os alunos sobre o facto de ser ou não polinómio mas, atendendo a que já havia passado algum tempo sobre a apresentação e utilização de alguns exemplos a professora Rosário Lopes interrompeu a aula para colocar essa questão aos alunos.

A professora estagiária compreendeu a necessidade de ter falado mais cedo do facto de este exemplo não ser um polinómio pois ao estar muito tempo no quadro, integrado numa listagem de polinómios que estavam sistematicamente a ser referenciados, poderia levar a que, quando fosse chamado à atenção que não se tratava de um polinómio, alguns alunos não ouvissem e ficassem com uma ideia errada sobre o conceito.

A professora estagiária prosseguiu a aula e apresentou a definição de polinómio de grau n e explicou o porquê da utilização de índices na notação utilizada para identificar os coeficientes do polinómio. Apresentou diversos exemplos de polinómios (completo, constante e nulo) não tendo os alunos apresentado dificuldades durante a exposição aparentando ter compreendido as explicações.

Conforme já foi referido, a adição, a subtração e o produto de polinómios não exigiu muito tempo da aula por serem já do conhecimento dos alunos. Na multiplicação de polinómios a professora estagiária recorreu a diversas cores para facilitar a compreensão por parte dos alunos, aspeto que foi referido como um aspeto positivo pela professora Doutora Maria Helena Santos, no término da aula.

A morosidade exigida pela explanação do conceito de polinómio e a necessidade de diversificar os exemplos apresentados à turma não permitiu a lecionação da operação de divisão de polinómios tal como previsto no plano de aula. Também a resolução de exercícios não foi possível, dada a falta de tempo.

No final da aula as professoras assistentes manifestaram as suas opiniões reforçando a importância de não permitir que fiquem coisas erradas durante muito tempo no quadro e referiram um pormenor que passou despercebido à professora estagiária. Durante a explicação do porquê da utilização de índices nos coeficientes dos polinómios, a professora estagiária recorreu ao polinómio ax+b e quando pretendia usar o polinómio do segundo grau, $ax^2 + bx + c$, dado o nervosismo, não escreveu o $+c$. Este facto não se mostrou muito relevante dado que o que se pretendia era explorar o facto do coeficiente de x^2 ter de ser diferente de zero, mas foi relevante ser referido pela professora Doutora Maria Helena Santos para a professora estagiária ter mais atenção a pormenores em aulas seguintes.

Apesar da manutenção da expressão $\frac{x+x^2}{x^4}$ na listagem de polinómios no quadro durante demasiado tempo e o consequente nervosismo da professora estagiária, as professoras assistentes consideraram que a aula correu bem. A professora estagiária também sentiu que a aula correu bem, embora a situação do início tivesse tido algumas implicações no desenvolvimento da aula. O nervosismo levou a que a professora estivesse mais reticente com cada participação dos alunos e mais atenta às suas intervenções tentando evitar que se voltassem a cometer erros.

4.1.2. 2º Período

No segundo período foram planificadas e lecionadas duas aulas sequencias, isto é, lecionadas em dias seguidos. Ambas foram assistidas pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela professora Rosário Lopes.

4.1.2.1. Aula 4 – 25/02/2016 – Geometria Analítica no Espaço

A primeira aula lecionada no segundo período ocorreu no dia 25 de fevereiro. Nesta aula foi introduzida a Geometria Analítica no Espaço.

Esta aula foi muito interessante de planificar pois o conteúdo a lecionar permitiu à professora estagiária, a utilização do programa Geogebra. A par da planificação da aula a professora preparou ficheiros em Geogebra para exploração durante a aula. Todos os ficheiros foram preparados e estudados tendo em conta eventuais dúvidas que poderiam surgir aos alunos. Consequentemente, esta planificação exigiu mais trabalho do que as planificações anteriormente elaboradas.

Esta aula incidiu sobre as coordenadas de pontos no espaço e consequentemente sobre os conceitos de eixos coordenados e projeção ortogonal. Foi explicado aos alunos como faziam uma projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta e posteriormente explicada a projeção ortogonal no espaço. Foram assim introduzidas as coordenadas de um ponto no espaço.

Os ficheiros produzidos pela professora foram explorados conforme planeado e os alunos mostraram-se interessados e participativos. No início foi difícil que alguns alunos fossem capazes de visualizar os três planos coordenados, mas foi mais fácil quando equiparado com as paredes da sala. A analogia ao rodapé e às paredes permitiu aos alunos uma mais fácil visualização.

O facto de recorrer ao Geogebra também facilitou o desenvolvimento da aula, na medida em que a professora não precisou de fazer muitas representações no quadro, o que tornaria mais complicada a compreensão por parte dos alunos. Ainda assim, a maioria das representações feitas no quadro foram claras para os alunos.

O plano da aula não foi totalmente cumprido. A professora estagiária não teve tempo para lecionar as projeções ortogonais de um ponto nos planos coordenados pelo que também não teve a possibilidade de realizar o exercício que estava previsto.

No final da aula as professoras assistentes fizeram alguns comentários. A professora Doutora Maria Helena Santos mencionou o facto de a professora estagiária escrever muito do que está disponível no manual, não havendo essa necessidade. A professora Rosário Lopes fez uma sugestão que foi aceite pela professora estagiária e que foi concretizada na aula seguinte.

4.1.2.2. Aula 5 – 29/02/2016 – Geometria Analítica no Espaço

A segunda aula lecionada no segundo período ocorreu no dia 29 de fevereiro e foi a continuação da aula de dia 25 de fevereiro, sobre Geometria Analítica no Espaço.

Esta aula incidiu sobre as coordenadas de um ponto no espaço, os octantes e as equações dos planos coordenados. O plano de aula foi totalmente cumprido. O facto de ter havido necessidade de concluir o plano da aula anterior não influenciou o cumprimento do plano desta aula.

No início da aula a professora estagiária desenhou no quadro um paralelepípedo num referencial, conforme a professora Rosário Lopes tinha sugerido, e questionou os alunos quanto às coordenadas dos vértices deste. Aproveitou esta representação para explicar aos alunos que as coordenadas dos vértices se podem obter através das projeções ortogonais dos vértices nos planos coordenados.

Os alunos tiveram algumas dificuldades em compreender como faziam uma projeção ortogonal num plano. Assim, a professora estagiária voltou a fazer uma analogia com as paredes da sala. Usou uma borracha e explicou aos alunos onde seriam as projeções desse “ponto” nos planos (chão e paredes). Esta explicação facilitou a compreensão dos conceitos por alguns alunos.

Depois disto a professora estagiária propôs aos alunos a realização do exercício que estava previsto para a aula anterior, o que estes fizeram sem apresentar muitas dificuldades.

Com o apoio de um ficheiro do Geogebra e com a colaboração dos alunos a professora estagiária preencheu uma tabela que relacionava cada um dos octantes com os sinais das coordenadas de um qualquer ponto no referencial e depois realizou, também com a colaboração dos alunos, o exercício que estava previsto na planificação.

Houve um momento da aula em que a exploração do ficheiro Geogebra não estava a ser clara para os alunos e a professora orientadora sugeriu à professora estagiária que alterasse o ponto de vista e, então, os alunos conseguiram visualizar o que se pretendia.

No final da aula a professora estagiária questionou os alunos sobre as equações dos planos coordenados e como seriam as equações de planos paralelos aos planos coordenados. Recorrendo a um ficheiro Geogebra foi possível os alunos visualizarem os planos paralelos aos planos coordenados e concluir como seriam as suas equações. Por falta de tempo já não foi possível fazer a sistematização deste conceito, que foi feita posteriormente pela professora Rosário Lopes.

Considerando a observação da professora Doutora Maria Helena Santos no final da aula anterior, nesta aula a professora estagiária já não escreveu tanto no quadro tendo remetido os alunos para as informações presentes no manual.

4.1.3. 3º Período

No terceiro período apenas foi planificada e lecionada uma aula que foi assistida pela professora Doutora Maria Helena Santos e pela professora Rosário Lopes. Surgiu a possibilidade de a professora estagiária lecionar o conjunto de aulas da última semana do período. No entanto, dada a modificação da planificação para integrar apresentações pelos alunos e o curto espaço de tempo, a professora estagiária não lecionou mais aulas neste período.

4.1.3.1. Aula 6 –16/05/2016 – Funções Definidas por Ramos

Nesta aula foram lecionadas as funções definidas por ramos. Não foi possível lecionar a função módulo, conforme estava previsto pelo que o plano não foi totalmente cumprido. A professora estagiária fez uma breve introdução ao assunto mas não teve tempo para o concluir.

A professora estagiária sentiu que, após apresentar a partição de um conjunto os alunos tinham compreendido. No entanto, no final da aula a professora Rosário Lopes referiu o facto de considerar que os alunos não tinham realmente compreendido e considerou que a professora estagiária deveria ter apresentado mais exemplos. A professora estagiária não ter apresentado mais exemplos prendeu-se com o facto de ter considerado que os alunos já tinham compreendido e que estes não seriam necessários.

De seguida fez a representação do gráfico de uma função por ramos de domínio $\mathbb{R}$ e questionou os alunos como poderia ser definida analiticamente aquela função, tendo explorado a questão do sinal de igual poder integrar uma ou outra expressão, naquele caso. Explorou também uma situação em que o sinal de igual deveria integrar, obrigatoriamente, uma das condições, o que considerou relevante para a compreensão pelos alunos.

Remeteu os alunos para o manual e, acompanhando a leitura da definição de função definida por ramos representou a generalização de uma função desta tipologia no quadro. No final da aula a professora Doutora Maria Helena Santos considerou que a professora estagiária poderia ter feito uma analogia com o exemplo para melhor esclarecer os alunos. Certamente, essa analogia teria permitido aos alunos uma melhor compreensão da generalização que se tinha acabado de fazer. No entanto, no momento não ocorreu à professora estagiária fazê-lo.

No término da aula a professora estagiária propôs aos alunos a resolução dos exercícios selecionados do manual e pediu que alguns destes se dirigissem ao quadro para resolver algumas alíneas. Um dos alunos que foi ao quadro apresentou algumas dificuldades e dúvidas e a professora estagiária tentou que este ficasse esclarecido. No final da aula a professora Doutora Maria Helena Santos referiu o facto de, nesta altura, a professora estagiária ter dado pouca atenção aos restantes alunos, situação com a qual a professora concordou e compreendeu a importância de estar sempre atenta a toda a turma.

4.2. Avaliação

A avaliação dos alunos da turma é feita numa escala de 0 a 20. A nota final de cada aluno reflete todo o seu trabalho sendo esta resultado de uma média ponderada da seguinte forma: 80% da média dos testes, 10% da média das fichas de avaliação, 5% dos trabalhos de casa e 5% do trabalho realizado e empenho em trabalho aula.

4.2.1. Tarefas propostas para avaliações escritas

Durante o estágio pedagógico a professora estagiária colaborou com a professora orientadora na realização dos testes e fichas de avaliação que iam ser realizados com a turma.

Inicialmente, e dada a falta de experiência da professora, as propostas eram feitas com a professora Rosário Lopes que ia manifestando e justificando o seu agrado ou desagrado com as sugestões apresentadas. Com o avançar do período a professora estagiária sugeria exercícios que posteriormente eram ou não integrados na tarefa de avaliação.

No segundo período, as professoras estagiárias, em conjunto, prepararam integralmente o enunciado de um teste. Posteriormente a professora Rosário Lopes fez as alterações que considerou convenientes de forma a incluir conteúdos que pretendia avaliar e removendo outros que já haviam sido avaliados em testes anteriores.

Além da produção dos testes, a professora estagiária também participou na discussão dos critérios de avaliação. Inclusive, na primeira ficha de avaliação, no primeiro período, teve a oportunidade de criar os próprios critérios (em conjunto com a outra professora do núcleo de estágio). Posteriormente, estes critérios foram discutidos com a professora orientadora.

A possibilidade de criação e discussão de critérios de avaliação foram aspetos muito importantes para a professora estagiária. Por exemplo, nos critérios criados pelas professoras estagiárias, os alunos eram penalizados diversas vezes pelo mesmo erro. A chamada de atenção feita pela professora orientadora foi muito importante, na medida em que as tarefas de avaliação acompanham todo o trabalho de um professor e são por isso, ensinamentos que a professora estagiária terá sempre em conta no desenvolvimento da sua atividade profissional.

4.2.2. Correção de testes e critérios

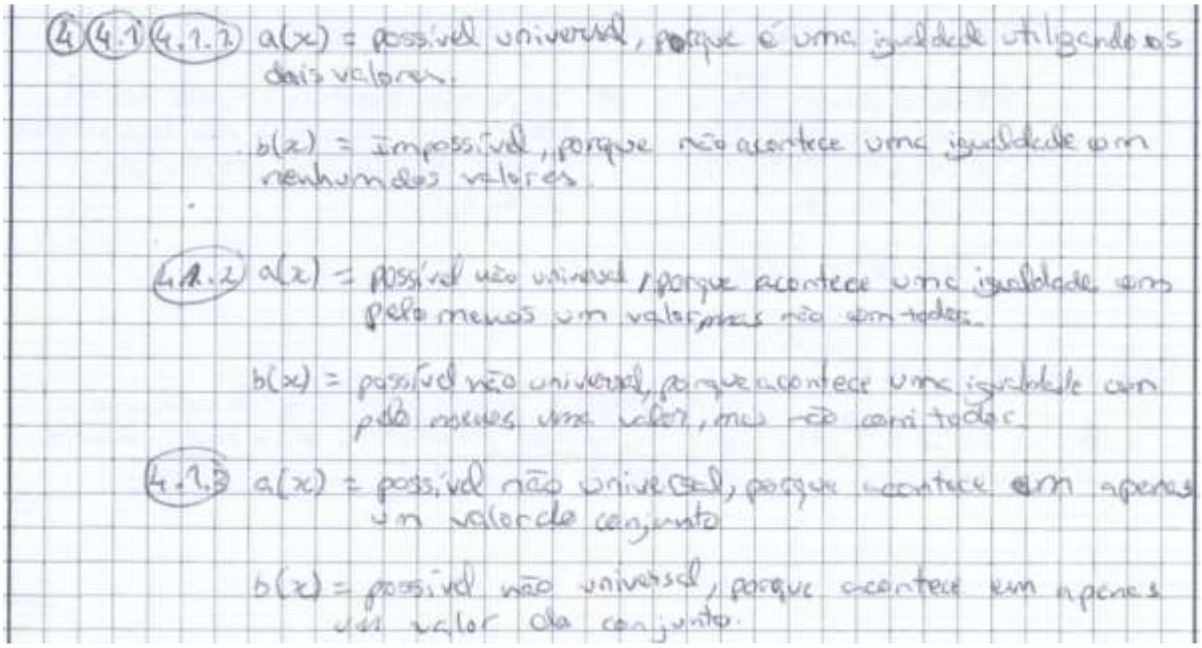
A professora estagiária considerou bastante útil e gratificante a oportunidade que teve de fazer a correção dos testes de alguns alunos. Foi importante para a professora estagiária, na medida em que lhe foi possível compreender que uma tarefa que anteriormente considerava relativamente simples, se pode tornar num processo realmente complexo. Esta complexidade surge, por exemplo, da eventual necessidade de redefinir critérios para contemplar situações imprevistas.

A primeira oportunidade de correção ocorreu na primeira ficha de avaliação. Para esta ficha, conforme já foi referido, a professora estagiária realizou a correção com os próprios critérios. Nesta correção foi onde houve uma maior diferença entre as notas atribuídas pela professora Rosário Lopes e pela professora estagiária. A comparação das cotações atribuídas pode ser analisada na tabela 3. Como se pôde constatar, a maior discrepância surgiu na questão 4.1., questão na qual a professora estagiária estava a penalizar os alunos diversas vezes pelo mesmo erro. Essas discrepâncias estão destacadas a azul na tabela 3.

Tabela 3 – Comparação das cotações na Ficha de Avaliação

		E.M.	1.1.1	1.1.2	1.2	2	3.1	3.2.1	3.2.2	3.2.3	4.1	4.2	Total	Diferença
		45	15	15	15	20	20	10	5	15	30	10	200	
Aluno 1	Prof. Rosário	45	0	0	5	0	0	5	0	15	10	2	8,2	1,2
	Prof. Estagiária	45	0	0	6	1	0	2	0	15	1	0	7	
Aluno 2	Prof. Rosário	45	15	15	13	20	5	6	0	15	25	10	16,9	2,7
	Prof. Estagiária	45	15	15	13	20	0	6	0	9	9	10	14,2	
Aluno 3	Prof. Rosário	45	15	15	15	20	20	10	5	15	15	9	18,4	1,6
	Prof. Estagiária	45	14	14	15	20	20	8	5	13	6	8	16,8	
Aluno 4	Prof. Rosário	15	15	15	5	0	5	5	4	0	30	10	10,4	0,3
	Prof. Estagiária	15	15	15	13	0	0	5	0	0	30	8	10,1	
Aluno 5	Prof. Rosário	30	15	15	13	20	20	10	5	15	30	10	18,3	0,4
	Prof. Estagiária	30	15	15	13	20	20	8	5	13	30	10	17,9	
Aluno 6	Prof. Rosário	45	15	15	10	20	20	10	5	15	30	10	19,5	0
	Prof. Estagiária	45	15	15	10	20	20	10	5	15	30	10	19,5	
Aluno 7	Prof. Rosário	45	15	15	15	20	20	0	5	15	15	0	16,5	-1
	Prof. Estagiária	45	15	13	14	20	20	0	5	15	30	0	17,5	
Aluno 8	Prof. Rosário	30	14	10	5	0	0	0	0	0	10	0	6,9	1,2
	Prof. Estagiária	30	10	8	4	0	0	0	0	0	5	0	5,7	

Note-se que no caso do Aluno 7 há uma grande discrepância nas cotações atribuídas mas, neste caso, é a professora estagiária quem atribuí uma pontuação mais alta. As justificações apresentadas pelo aluno são muito genéricas, como se pode ver na figura 1.


4 4.1 4.1.1 a(x) = possível universal, porque é uma igualdade utilizando os dois valores.

b(x) = impossível, porque não acontece uma igualdade em nenhum dos valores.

4.1.2 a(x) = possível não universal, porque acontece uma igualdade em pelo menos um valor, mas não em todos.

b(x) = possível não universal, porque acontece uma igualdade em pelo menos um valor, mas não em todos.

4.1.3 a(x) = possível não universal, porque acontece em apenas um valor do conjunto.

b(x) = possível não universal, porque acontece em apenas um valor do conjunto.

Figura 1 – Resposta apresentada pelo Aluno 7 na Ficha de Avaliação

O Aluno 7 apresenta justificações corretas mas não apresenta cálculos que sustentem as suas justificações. A professora estagiária considera todas as justificações corretas e não faz qualquer desconto. De facto, deveriam ter sido feitas penalizações. Se a professora estagiária fizesse a correção agora, com os mesmos critérios, atribuiria uma cotação de 18 pontos sendo que descontava metade de cada justificação (3+4+5=12 pontos). Nessa situação, as cotações atribuídas pelas duas professoras seriam mais equilibradas.

Os critérios usados pela professora estagiária para corrigir a questão 4.1. estão apresentados na tabela 4. Considerando que a justificação poderia ser a mesma em todas as alíneas da questão, se um aluno não justificasse, era penalizado três vezes (em 4.1.1, em 4.1.2 e em 4.1.3).

Tabela 4 – Critérios de correção da questão 4.1. da Ficha de Avaliação

4.	4.1.1	8	1	Classificar a condição
			3	Justificar
	4.1.2	10	1	Classificar a condição
			4	Justificar
	4.1.3	12	1	Classificar a condição
			5	Justificar

Nas correções seguintes, que já foram realizadas de acordo com os critérios elaborados pela professora Rosário Lopes, a diferença entre as notas atribuídas a cada aluno foi consideravelmente menor. Essas diferenças podem ser analisadas nas tabelas 5 e 6.

Tabela 5 - Comparação das cotações no 1º Teste de Avaliação

		E.M.	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4.1	4.2	5	Total	Diferença
		50	16	16	13	11	6	8	15	20	20	15	10	200	
Aluno 1	Prof. Rosário	10	14	16	3	5	1	6	10	5	13	9	8	10	0,2
	Prof. Estagiária	10	12	14	3	4	2	8	11	5	10	9	10	9,8	
Aluno 2	Prof. Rosário	20	11	14	0	11	6	8	15	18	16	0	7	12,6	1
	Prof. Estagiária	20	8	13	0	11	6	8	15	17	13	0	5	11,6	
Aluno 3	Prof. Rosário	50	12	16	13	9	6	8	14	20	15	15	10	18,8	0,5
	Prof. Estagiária	50	11	16	13	10	6	8	13	13	18	15	10	18,3	
Aluno 4	Prof. Rosário	50	16	1	10	7	6	8	15	6	16	0	0	13,5	-0,7
	Prof. Estagiária	50	16	4	13	9	6	8	15	10	6	5	0	14,2	
Aluno 5	Prof. Rosário	50	16	13	13	11	6	8	15	20	20	15	10	19,7	-0,2
	Prof. Estagiária	50	16	16	13	11	6	8	15	19	20	15	10	19,9	
Aluno 6	Prof. Rosário	50	6	15	10	11	6	8	14	13	14	7	8	16,2	-0,5
	Prof. Estagiária	50	6	16	10	11	6	8	14	15	12	9	10	16,7	
Aluno 7	Prof. Rosário	30	13	16	0	11	6	6	15	19	9	0	2	12,7	0,1
	Prof. Estagiária	30	11	16	0	11	6	7	15	19	6	0	5	12,6	
Aluno 8	Prof. Rosário	30	8	7	10	7	6	6	14	0	0	0	0	8,8	0
	Prof. Estagiária	30	6	8	8	9	6	8	13	0	0	0	0	8,8	

Tabela 6 – Comparação das cotações no 2º Teste de Avaliação

		E.M.	1	2	3	4	5.1	5.2	6.1	6.2	7.1	7.2	7.3	Total	Diferença
		50	15	15	15	15	14	15	8	10	15	20	8	200	
Aluno 1	Prof. Rosário	40	13	7	0	0	3	3	2	0	3	1	0	7,2	0,2
	Prof. Estagiária	40	10	5	0	0	3	3	5	1	3	0	0	7	
Aluno 2	Prof. Rosário	30	15	3	0	0	14	15	4	1	0	0	8	9	0,3
	Prof. Estagiária	30	15	3	0	0	14	14	2	1	0	0	8	8,7	
Aluno 3	Prof. Rosário	50	15	15	6	13	14	15	8	9	14	10	8	17,7	0,7
	Prof. Estagiária	50	15	14	4	12	14	15	8	10	10	10	8	17	
Aluno 4	Prof. Rosário	30	15	7	0	1	6	0	0	0	15	2	6	8,2	0,6
	Prof. Estagiária	30	15	3	0	1	5	0	0	0	15	2	5	7,6	
Aluno 5	Prof. Rosário	40	10	7	0	2	3	3	4	3	13	1	7	9,3	0,9
	Prof. Estagiária	40	6	6	0	3	3	3	5	2	9	5	2	8,4	
Aluno 6	Prof. Rosário	50	11	15	0	10	11	11	8	10	14	20	8	16,8	0,6
	Prof. Estagiária	50	10	15	0	5	11	12	8	10	13	20	8	16,2	
Aluno 7	Prof. Rosário	50	15	15	15	0	13	15	8	8	7	20	7	17,3	0,7
	Prof. Estagiária	50	15	14	13	0	13	15	8	5	7	20	6	16,6	
Aluno 8	Prof. Rosário	40	14	6	0	0	8	12	0	0	0	0	7	8,7	0,6
	Prof. Estagiária	40	13	2	0	0	8	12	0	0	0	0	6	8,1	

4.3. Direção de turma

Durante o estágio pedagógico, para além da prática pedagógica supervisionada, foram também realizadas, pela professora estagiária, as tarefas inerentes ao cargo de Diretor de Turma, tais como a marcação e justificação de faltas, o lançamento de notas, a preparação de reuniões intercalares e das respetivas atas, o envio de cartas e telefonemas para os encarregados de educação e a receção dos mesmos na escola, a preparação das reuniões de encarregados de educação e, inclusive, a atualização do PEI[2] de um aluno. Além das tarefas diretamente ligadas à turma, enumeradas acima, a professora estagiária esteve presente nas reuniões dos diretores de turma do ensino secundário, nas quais eram dados esclarecimentos sobre como proceder em diversas situações.

[2] Programa Educativo Individual

A turma nunca apresentou casos de indisciplina, no entanto, existiram algumas situações que não sendo muito comuns permitiram conhecer melhor a importância do Diretor de Turma em situações diversificadas. Um exemplo foi o caso de um aluno que, embora inscrito na turma, nunca compareceu na escola e, após várias tentativas infrutíferas de contacto com o encarregado de educação e após o envio de cartas registadas, soube-se que tinha mudado de escola. Assim, a professora estagiária ficou a saber que se um aluno não comparecer na escola num período alargado de tempo e se não houver qualquer informação sobre o mesmo há vários procedimentos que têm de ser adotados entre os quais, o contacto com a CPCJ[3].

Acompanhar a recepção dos encarregados de educação pelo Diretor de Turma também foi uma experiência enriquecedora, pois possibilitou o contacto com estes e permitiu conhecer o contexto familiar de alguns alunos, o que pode ajudar a compreender alguns dos seus comportamentos.

Experienciar o papel de Diretor de Turma foi muito interessante pois permitiu à professora estagiária a consciencialização de diversos aspetos inerentes ao desempenho deste cargo e dos quais não tinha conhecimento.

Desenvolver o trabalho de Diretor de Turma é uma tarefa que exige trabalho e conhecimento das competências inerentes ao cargo. A possibilidade de acompanhar e participar no trabalho desenvolvido pelo Diretor de Turma foi uma experiência muito importante e enriquecedora para a professora estagiária e para o seu futuro profissional. Assumir uma direção de turma sem nunca ter tido qualquer tipo de contacto com esta função poderia revelar-se uma tarefa mais complexa.

[3] Comissão de Proteção de Crianças e Jovens

5. Trabalho realizado com as turmas de 9º ano

No presente capítulo faz-se uma descrição do trabalho realizado com as duas turmas de 9º ano. São apresentadas as aulas em que a professora estagiária acompanhou as turmas e, neste contexto são apresentados um projeto e um concurso nos quais os alunos das turmas participaram. São também descritas as aulas lecionadas pela professora estagiária ao longo do ano.

5.1. Aulas O.C.

Durante o ano letivo, a professora estagiária acompanhou as aulas de Oferta Complementar destinadas, por decisão de escola, às disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, aulas que decorreram uma vez por semana (um bloco de 50 minutos). Este acompanhamento foi realizado nas turmas X e Y do 9º ano, sendo as aulas quinzenais para cada turma.

Durante o primeiro período foram realizadas três fichas de trabalho com exercícios adaptados dos exames nacionais de anos anteriores e uma ficha de avaliação na última semana de aulas. No segundo período realizou-se uma quarta ficha de trabalho e os alunos participaram no Projeto ALEA e no Concurso de Matemática PANGEA (ver subcapítulos seguintes). Neste período a avaliação incidiu, para além do trabalho desenvolvido em aula pelos alunos, em algumas questões aula sobre os conteúdos trabalhados nas fichas realizadas em aula.

Durante o terceiro período a professora estagiária apenas acompanhou uma das turmas durante as primeiras semanas. Nessas aulas a professora orientadora disponibilizou o enunciado do exame do ano letivo anterior e os alunos realizaram exercícios do mesmo. Além disso, os alunos esclareceram dúvidas sobre alguns conteúdos frequentes em exame nacional.

5.1.1. Projeto ALEA

O ALEA - Acção Local Estatística Aplicada - surgiu de um projeto conjunto da Escola Secundária de Tomaz Pelayo e do Instituto Nacional de Estatística e constitui-se no âmbito da Educação, da Sociedade da Informação, da Informação Estatística, da Formação para a Cidadania e da Literacia Estatística. O ALEA consiste num contributo para a produção e disponibilização de materiais de apoio ao ensino da Estatística, quer para alunos, quer para professores do Ensino Básico e Secundário.

Os desafios do ALEA são problemas baseados em notícias publicadas em órgãos de comunicação social e destinam-se a alunos do Ensino Básico e Secundário. Os alunos participam *online* e, se responderem corretamente ao problema proposto, podem receber um prémio e um diploma de participação. No final do ano letivo é realizado um sorteio entre os alunos que responderam corretamente aos desafios propostos, para atribuição de um prémio especial.

No âmbito deste projeto os alunos participaram nos dois problemas propostos no presente ano letivo.

5.1.2. Concurso Matemático PANGEA

O Concurso de Matemática Pangea é organizado pela "Egitim Plataformu – Associação de Educação Académica", uma associação sem fins lucrativos.

Este concurso é organizado em 17 países: Alemanha, Bélgica, Dinamarca, França, Irlanda, Itália, Lituânia, Áustria, Polónia, Portugal, Suécia, Suíça, Eslováquia, Eslovênia, Espanha, República Checa e Hungria.

A filosofia "A Matemática Une" é transnacional. No entanto, como o concurso se realiza em vários países, com diversos programas de ensino, tipos de escolas e níveis de ensino variados, cada país organiza o concurso de forma local, de acordo com a sua realidade. As atividades são controladas pelo Pangea Internacional e requerem o seu consentimento.

A edição de 2015/16 do Concurso destinou-se a alunos do 3º ao 10º ano de escolaridade.

A prova da primeira fase do 9ºano consistia em 20 questões de escolha múltipla com conteúdos do programa da disciplina lecionados até ao momento da realização da prova.

5.2. Aulas Lecionadas

As aulas lecionadas nas turmas de 9º ano pela professora estagiária foram as duas assistidas pela orientadora de estágio, professora Rosário Lopes e pela professora titular das turmas. A professora Doutora Maria Helena Santos, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, assistiu apenas à segunda aula.

5.2.1. 1º Período

5.1.2.1. Aula 1 – 17/12/2015 – Tarefa sobre equações do 2º grau e função quadrática

A primeira aula de 9º ano foi lecionada no dia 17 de dezembro, último dia de aulas do primeiro período, no 9ºX. Esta aula foi assistida pela professora titular da turma e pela professora Rosário Lopes.

Não tendo sido lecionados novos conteúdos, a aula consistiu apenas na resolução de uma tarefa proposta no manual adotado e a respetiva correção no quadro, por sugestão da professora titular da turma.

Por ser o último dia de aulas, a maioria dos alunos não tinha o manual da disciplina. Assim, para que se pudesse realizar a tarefa de forma mais célere, a professora escreveu no quadro as primeiras questões para permitir aos alunos avançar na realização das mesmas. Enquanto os alunos resolviam estas questões, e uma vez que existia um computador com acesso à internet, projetaram-se as restantes questões no quadro, o que permitiu colmatar o facto de os alunos não terem o manual.

O facto de acompanhar a turma durante as aulas de complemento à disciplina permitiu à professora estagiária conhecer os alunos da turma mas não permitiu conhecer as suas dinâmicas na aula de matemática. Assim, nesta aula houve alguma dificuldade na gestão da aula por parte da professora estagiária, uma vez que não sabia qual a reação dos alunos quando convidados a participar oralmente ou a ir ao quadro.

O início da aula não correu como previsto, mas apesar disso, o desenvolvimento da aula ocorreu de acordo com o que havia sido planeado. Os alunos tiveram tempo para resolver as primeiras questões e só depois de realizada a sua correção é que avançaram tendo sido possível concluir a realização e correção da tarefa.

Durante a correção da tarefa no quadro, os alunos revelaram-se interessados e participativos. Quando chamados a participar, os alunos respondiam e, inclusive, iam ao quadro apresentar as suas resoluções. Durante a correção no quadro, surgiu a necessidade de explicitar que uma equivalência apenas era verdadeira se um determinado parâmetro fosse diferente de zero. A professora estagiária estava com dúvidas de qual a notação/representação usada pelos alunos pelo que professora Rosário Lopes interveio sugerindo que usasse qualquer notação/representação correta permitindo aos alunos ter contacto com diferentes notações, se fosse o caso.

A planificação da aula foi simples por se tratar apenas da resolução de uma tarefa e, consequentemente, aplicação de conteúdos. Durante a aula não houve necessidade de rever os conteúdos necessários à resolução das tarefas. Poucas foram as dúvidas que surgiram e os alunos não se inibiram nem de solicitar o esclarecimento de dúvidas, quando necessário, nem de pedir para repetir explicações e justificações.

Por ser uma aula de resolução de uma tarefa, foi mais propício a que os alunos conversassem entre si, discutindo, em pares, as suas resoluções. No final da aula, e dadas as caraterísticas da aula, a professora orientadora não teceu muitos comentários referindo apenas o facto de a professora estagiária ter de dar mais atenção à turma, no sentido de manter o silêncio na sala.

5.2.2. 3º Período

5.2.2.1. Aula 2 – 14/04/2016 – Ângulos internos e externos de um polígono

A segunda aula lecionada numa turma de 9º ano ocorreu no início do terceiro período, no 9ºY. Nesta aula foi lecionada a soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono.

Esta aula desenvolveu-se de acordo com o plano elaborado previamente. Os alunos foram chamados a participar e deram o seu contributo sempre que solicitados. Embora o conhecimento dos alunos da turma Y, por parte da professora estagiária, fosse muito semelhante ao conhecimento dos alunos da turma X, sendo uma aula teórica, permitiu uma dinâmica diferente durante a aula.

Nesta turma, foi mais fácil conhecer os alunos e as suas capacidades por duas razões. Primeiro, esta turma apresentava um menor número de alunos e, segundo, dado o facto de a aula ter ocorrido já no terceiro período, houve mais interação entre a professora estagiária e a turma. Conhecer melhor a turma contribuiu para um melhor funcionamento da aula. Os alunos estiveram sempre prontos a responder, até mesmo quando questionados sobre a sua resposta.

Uma situação interessante foi o facto de que quando foram questionados sobre como se poderia obter a amplitude de cada um dos ângulos internos de um polígono regular um aluno respondesse que se dividia a soma S_i pelo número de lados e outro aluno disse que se divide pelo número de ângulos internos. Quando confrontados com esta questão os alunos hesitaram, mudaram as respostas e gerou-se uma ligeira confusão relativamente à utilização de “lados” e “ângulos” até que um terceiro aluno concluiu que o número de lados é igual ao número de ângulos internos.

Embora na planificação não estivesse previsto a explicitação no quadro de alguns resultados, optou-se por fazê-lo por sugestão da professora titular da turma, pois os alunos tendem a estudar mais pelos próprios cadernos do que pelo manual. Este facto não teve quaisquer implicações na gestão da aula, tendo sido possível o cumprimento do plano e resolução de exercícios de aplicação dos conteúdos lecionados.

A professora estagiária sentiu que a aula passou muito rápido e que lhe faltaria tempo para lecionar tudo o que estava previsto. Inicialmente sentiu que o tempo não ia ser suficiente, no entanto, os alunos colaboraram positivamente para o desenvolvimento da aula pelo que se pôde avançar rapidamente. Além de conseguir lecionar tudo o que estava previsto, ainda foi possível, no final da aula, a realização de alguns exercícios de consolidação da matéria que tinha sido lecionada.

No final da aula, a Professora Doutora Maria Helena Santos referiu que alguns conteúdos poderiam ter sido mais explorados como por exemplo partindo do facto de que, em cada vértice, um ângulo externo e um ângulo interno serem suplementares e já se ter concluído que a medida da amplitude de um ângulo interno de um polígono regular é dado por $\frac{S_i}{n}$, concluir que a medida da amplitude de um ângulo externo pode obter-se a partir de $180° - \frac{S_i}{n}$, ao invés de se obter a partir do facto de a soma das medidas de amplitude dos ângulos externos ser sempre $360°$ e calculando $\frac{360°}{n}$.

6. Trabalho Extra-aula

No presente capítulo faz-se uma apresentação do trabalho realizado fora da sala. Apresenta-se o Projeto Descobre Se És Capaz, não se tendo realizado quaisquer outras atividades.

6.1. Projeto Descobre se és capaz

O projeto "Descubra se é capaz" – desafios matemáticos – já existia na escola, mas apena numa versão para o 3º Ciclo. Assim, no âmbito do Estágio Pedagógico foi desenvolvido o projeto "Descobre e és capaz" que constava de um conjunto de desafios quinzenais, para o Ensino Secundário.

Quinzenalmente era afixado o enunciado da semana e a resolução dos desafios da semana anterior. Foram afixados 11 Desafio, cada enunciado com três níveis de dificuldade ficando ao critério do aluno a decisão sobre qual dos três resolver.

A correção das resoluções estava ao cargo das professoras estagiárias e a atribuição das pontuações era feita com base nas pontuações estabelecidas no regulamento do projeto (tabela 7). O facto de classificação atribuída a uma resolução parcialmente correta de um nível mais difícil ser superior à de uma resolução totalmente correta de um nível mais fácil foi intencional e pretendia-se com isso que os alunos se sentissem desafiados a tentar a resolução dos desafios de níveis mais elevados.

Tabela 7 – Tabela de Classificações dos Desafios

Resolução\Nível	Fácil	Médio	Difícil
Totalmente correta	10	20	30
Parcialmente correta	5	12	15
Outras situações	0	0	0

Apesar da apresentação do projeto pelas professoras estagiárias turma a turma e a divulgação através de cartazes afixados (figura 2) nos diversos pavilhões da escola, este teve pouca adesão, sendo que apenas um aluno participou em todos os desafios propostos e outros três alunos participaram em apenas um. Embora tenha havido pouca adesão o projeto desenvolveu-se durante todo o ano letivo, sempre na esperança de novas participações.

Figura 2 – Cartaz de divulgação do projeto

7. Reflexão

No presente capítulo faz-se reflexão sobre as aulas lecionadas e os planos de aula elaborados pela professora estagiária. Posteriormente faz-se uma reflexão sobre as aulas da professora orientadora, apresentando-se cinco situação que se destacaram nestas aulas.

7.1. Aulas e Planos de aula

A lecionação de aulas foi uma experiência muito enriquecedora para a professora estagiária e fundamental para o seu futuro profissional. O único contacto que tinha tido com este contexto de aprendizagem fora o acompanhamento a dois alunos, em explicação. Assim, as primeiras aulas lecionadas no contexto da sala de aula foram muito importantes e entusiasmantes para a professora estagiária, bem como a preparação das mesmas.

As aulas lecionadas tiveram sempre por base uma planificação prévia. A planificação de aulas revelou-se mais complexa pelo facto da professora estagiária não ter, inicialmente, noção do tempo que demoraria a lecionar determinados conteúdos. O aconselhamento da professora Rosário Lopes foi muito importante nesse aspeto pois sugeria acrescentar ou retirar conteúdos consoante a planificação apresentada.

Todos os comentários tecidos pelas professoras assistentes, professora Rosário Lopes e professora Doutora Maria Helena Santos, foram muito importantes para a melhoria da prática pedagógica da professora estagiária pois esta tomou consciência de alguns aspetos que até então pareciam irrelevantes, conforme foram sendo referidos anteriormente. São exemplos o facto de ser importante dar atenção a toda a turma, mesmo quando se tenta explicar algo a um aluno em particular e não permitir que fiquem registos errados no quadro muito tempo, ainda que se chame à atenção para eles.

7.2. Aulas da professora orientadora

No início do ano a professora estagiária estava muito entusiasmada e curiosa sobre a forma como iriam decorrer as aulas da professora orientadora e que papel assumiria nessas aulas. A possibilidade de interagir com os alunos durante a realização dos exercícios foi muito importante e interessante, pois a professora estagiária começou a ter noção das dificuldades que os alunos apresentavam.

Diversas vezes os alunos não expunham as dúvidas à professora orientadora durante a exposição da matéria e esperavam pelos momentos de resolução de exercícios para colocar as suas questões. Era notória a dificuldade manifestada por alguns alunos na resolução de alguns exercícios e na compreensão daquilo que lhes era explicado quando colocavam as suas questões.

Durante a exposição da matéria pela professora Rosário, a professora estagiária assumia um papel passivo, sendo que ocupava um lugar na última fila, como se de uma aluna se tratasse. Ao início, a professora estagiária sentiu-se desiludida, mas com o decorrer das aulas sentiu que aquele era um lugar privilegiado de onde podia observar a dinâmica da aula numa perspetiva diferente daquela que o professor tem quando leciona a aula. Assim era possível analisar os comportamentos de alguns alunos e a sua postura face às aprendizagens.

"Lá de trás", a professora estagiária teve a possibilidade de ver o que acontece nas costas de um professor. Desde atirar papéis, lápis, borrachas, a conversas paralelas que quando questionados sobre essa mesma conversa a resposta dos alunos é "Não era nada professora. Desculpe!". Várias foram as vezes em que os alunos se esqueceram que tinham uma professora na última fila e agiram como se ninguém os visse.

Assumir este papel de observadora foi muito importante para a professora pois teve uma melhor noção daquilo que pode acontecer numa sala de aula, sem que o professor se aperceba.

Durante as suas aulas, a professora Rosário Lopes sempre se mostrou preocupada com a aquisição de conhecimentos por parte dos alunos. Questionava os alunos frequentemente de modo a certificar-se de que estes estavam a acompanhar todas as explicações. Incentivou os alunos a irem ao quadro mesmo quando estes apresentavam dúvidas na resolução que tinham realizado, o que a professora estagiária considerou muito importante para os alunos ganharem confiança em si próprios e não terem receio de expor as suas dúvidas e dificuldades perante a turma.

Outro aspeto relevante durante a lecionação de matéria por parte da professora Rosário Lopes foi a constante preocupação com a utilização rigorosa das definições e de notações. O rigor matemático esteve sempre presente e diversas vezes a professora cometeu abusos de linguagem para facilitar a compreensão dos assuntos por alguns alunos tendo sempre o cuidado de chamar a atenção dos alunos nessas situações.

Durante o ano houve diversas situações em aulas lecionadas pela professora orientadora que despertaram a atenção da professora estagiária por razões distintas. De seguida são apresentadas cinco dessas situações.

7.2.1. Situações ocorridas na aula da professora orientadora

7.2.1.1. Situação 1

No âmbito do tem da Lógica, na 13ª aula foram referidos os quantificadores. Foi apresentado aos alunos o quantificar universal e foi apresentada a sua notação. Após uma semana e meia de aulas (10 blocos de 50 minutos) em que os alunos trabalharam estes conteúdos, há um aluno que questiona a professora sobre algo que está no quadro e que não compreende.

– Professora, o que é aquele “Ax” ao contrário?

Para a professora estagiária esta intervenção foi importante e interessante para perceber que diversas vezes os alunos trabalham conteúdos sem os compreender e sem saber para que servem. Este foi um dos casos em que o aluno só se manifestou passadas cinco aulas, o que revela que durante o intervalo de tempo que decorreu, o aluno não estava a par do que estava a acontecer.

7.2.1.2. Situação 2

Numa segunda situação, os alunos tinham uma representação de uma elipse da qual eram pedidas as coordenadas dos 4 vértices. A professora Rosário já tinha escrito as coordenadas dos vértices sobre o eixo Ox. Quando escreveu no quadro as coordenadas dos vértices sobre o eixo Oy, escreveu $C(-4,0)$ e $D(4,0)$. Um aluno fez uma observação bastante pertinente e questionou se as coordenadas não estavam trocadas. A professora corrigiu o erro e prosseguiu.

A professora estagiária apercebeu-se da justificação do aluno para ter reparado no erro. O aluno não reparou no erro pelo facto dos pontos estarem sobre o eixo Oy e os zeros estarem nas ordenadas; a sua justificação foi que nos outros vértices o zero já estava nas ordenadas.

7.2.1.3. Situação 3

A terceira situação que chamou a atenção da professora estagiária foi quando, num exercício no âmbito da Geometria. Após os alunos terem escrito a equação da circunferência, a professora Rosário Lopes preencheu metade do círculo e questionou aos alunos como seria a condição que definia o semicírculo que se apresentava na figura. Houve duas respostas interessantes, embora erradas. Um aluno sugeriu dividir a equação por dois e outro sugeriu escrever metade da equação.

Foram respostas erradas mas interessantes. O que será que o segundo aluno queria dizer com escrever apenas metade da equação? Ficou a dúvida.

7.2.1.4. Situação 4

Durante a realização de exercícios foi possível verificar que alguns alunos têm dificuldades na interpretação das questões. O enunciado da questão era o que se apresenta na figura 3.

49 Num plano munido de um referencial o.n., considera os pontos $A(a+1\,,\ 2)$, $B(3\,,\ 2-b)$ e $C(3\,,\ -2)$, com $a\,,\ b \in \mathbb{R}$.

49.1 Determina a e b, supondo que:

a. C é o ponto médio de $[AB]$;

b. A é o ponto médio de $[BC]$.

Figura 3 – Enunciado do Manual dos Alunos (Vol. 2, p.29)

Após a realização da alínea 49.1 a), o aluno leu o enunciado da 49.1 b) e questionou se não podia usar os valores anteriormente calculados. O aluno não entende a independência das alíneas e não percebe o porquê de determinar novamente os valores de a e b, se já determinou os dois valores em a).

7.2.1.5. Situação 5

A quinta e última situação aqui apresentada ocorreu numa aula do tema das Funções. A situação repetiu-se duas vezes. A professora Rosário colocou uma questão à turma e um aluno com baixo desempenho respondeu corretamente, para espanto das professoras e dos colegas.

De facto, o aluno responde corretamente. No entanto, as suas respostas são dadas à sorte não tendo o aluno compreendido o porquê de estar a responder corretamente.

Esta situação foi importante para a professora estagiária na medida em que o facto de um aluno responder corretamente não significa que tenha realmente compreendido.

7.2.1.6. Breve conclusão

Estas situações acima apresentadas, e todas as outras que aqui não foram referidas, foram importantes para a professora estagiária pois alertaram-na para diversas situações.

A primeira situação alertou a professora estagiária para o facto de que, por mais que um professor considere que os alunos já compreenderam, certamente haverá um, que mesmo que não se manifeste, ainda não compreendeu.

A segunda situação foi importante na medida em que a professora estagiária se aperceber que diversas vezes os alunos tiram conclusões corretas, mas com as justificações erradas. Foi também interessante uma vez que a professora orientadora não ouviu o comentário feito pelo aluno. Isto alertou a professora estagiária para o facto de que, por muito que nos esforcemos por tomar atenção a tudo o que se passa na aula, existirão sempre situações e comentários que nos passam despercebidos.

A terceira situação foi, para a professora estagiária, muito interessante pois apesar das respostas dos alunos estarem erradas, é possível, muitas vezes, compreender melhor o raciocínio efetuado pelos alunos e, assim, corrigi-los de forma mais eficaz. Foi interessante presenciar as associações que os alunos fazem.

A quarta situação inquietou a professora estagiária, porque é realmente preocupante que alunos neste ano de escolaridade não sejam capazes de interpretar corretamente uma questão, aparentemente tão simples.

A quinta e última situação foi um misto de emoções. Por um lado, a professora estagiária sentiu uma enorme alegria nos momentos em que o aluno respondeu corretamente. No entanto saber que o aluno não tinha compreendido aquilo que estava a dizer, foi uma desilusão. Também foi importante para compreender a importância de tomar atenção a quem responde pois se for um aluno de excelente desempenho a responder à maioria das questões, há que ter em atenção que os restantes alunos podem não ter compreendido.

Por vezes, a intervenção sistemática dos melhores alunos pode criar a ilusão de que a turma está a acompanhar a aula. Assim, cabe ao professor procurar a participação dos restantes alunos da turma ainda que isso possa pôr em causa o cumprimento do plano previamente elaborado. Os alunos com mais dificuldades tendem a permanecer em silêncio pelo que procurar a sua participação pode contribuir para o sucesso de um maior número de alunos da turma.

PARTE II – INVESTIGAÇÃO

A aprendizagem da lógica no contexto do programa do 10º ano de escolaridade

1. Introdução

O objetivo deste capítulo é contextualizar o trabalho de investigação que se desenvolve. Apresenta-se uma breve descrição da pertinência do estudo e os objetivos que orientaram a sua elaboração. São tidas em conta as mudanças curriculares nos programas de matemática e são apresentados os objetivos e as questões de investigação.

1.1. Pertinência do Estudo

O propósito do presente estude prende-se com o surgimento da Lógica como um tema independente no programa do 10º ano de escolaridade. No antigo programa de Matemática A, não se encontra a Lógica como um tema independente, mas como parte integrante dos outros temas (MEC, 2001). Assim, a ideia de realizar uma investigação sobre a compreensão dos conceitos lecionados no tema da Lógica surgiu do facto de este ser um tema que foi introduzido isoladamente no programa do Ensino Secundário no presente ano letivo, como se pode verificar nas Metas Curriculares (MEC, 2014).

Segundo Matos (2014) e Aires e Santiago (2014), entre 1836 e 1963 nunca se encontra, nos Programas de Matemática, a Lógica como um tema independente. Em 1963 foi posto em prática um projeto experimental apoiado pela OCDE[4] e, nos anos seguintes, a experiência foi gradualmente expandida. Neste projeto, os programas de matemática continham alterações entre as quais a introdução de novos temas como, por exemplo, a Lógica. A Álgebra e a Análise eram os temas centrais (ocupavam um terço do curso) e a Análise era, então, mediada pela Lógica e pela Teoria de Conjuntos, que ocupavam um quinto do curso.

1.2. Objetivo

Até ao presente ano letivo, a Lógica surgia integrada nos restantes temas do currículo. Sendo este um tema que se torna autónomo no currículo, pretende-se compreender como é que os alunos integram esses conceitos por forma a resolverem tarefas matemáticas onde estes são fundamentais para a sua compreensão. Pretende

[4] Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico

também analisar-se as diferentes formas como os conceitos podem ser abordados, através das linguagens natural e simbólica e quais são mais usados pelos alunos.

1.3. Questões de investigação

Para dar cumprimento aos objetivos propostos recorre-se a um conjunto de questões que orientaram o projeto desenvolvido. As questões a que se pretendeu dar resposta com o estudo realizado foram as seguintes:

- Que compreensão é que os alunos manifestam relativamente aos conceitos de lógica, abordados no currículo do 10º ano?
- Que representações são privilegiadas na abordagem aos conceitos de lógica?
- Qual o papel que o simbolismo desempenha na compreensão dos conceitos de lógica?
- Quais as dificuldades que os alunos encontram na compreensão dos conceitos de lógica?

1.4. Organização do Estudo

No presente estudo apresenta-se uma revisão de literatura com a qual se pretendeu estabelecer o estado da arte sobre o tema, nomeadamente discutir as questões relacionadas com a compreensão em matemática, algumas teorias cognitivas presentes no ensino e aprendizagem da matemática, criando um quadro teórico que suporte o estudo que nos propomos realizar.

De seguida apresenta-se a metodologia – uma investigação de índole qualitativa, que incide no estudo de caso e as técnicas de recolha de dados foram a observação, a entrevista semiestruturada e a análise documental. São descritas as tarefas propostas aos alunos no contexto da entrevista bem como o contexto de ensino e os critérios de seleção dos alunos.

Seguidamente é feita a análise dos dados recolhidos na situação de entrevista e de avaliação sumativa.

No último capítulo apresentam-se as conclusões resultantes da análise destes mesmos dados.

2. Revisão de Literatura

O presente capítulo apresenta-se dividido em quatro tópicos. No primeiro tópico procura-se clarificar o que se entende por compreensão em matemática e qual é o papel das representações nessa compreensão. No segundo tópico apresentam-se quatro teorias cognitivas: Conceito imagem e Conceito definição (Sholmo Vinner), a Teoria da Reificação (Anna Sfard), a Teoria APOS (Ed Dubinsky) e os Três Mundos de Matemática (David Tall). No terceiro tópico procura-se caraterizar os tipos de conceito imagem desenvolvidos pelos alunos entre incipiente, instrumental e relacional. Esta categorização é feita por António Domingos. No quarto e último tópico faz-se um breve resumo sobre as Inteligências Múltiplas (Gardner) das quais se destaca a Inteligência Lógico-Matemática.

2.1. O que se entende por compreensão em matemática

Neste tópico faz-se uma síntese do que se entende por compreensão em matemática. São referidos, entre outros, autores como Sierpinska, Skemp, Hiebert e Carpenter.

Hiebert e Carpenter (1992) definem compreensão como a forma como é estruturada e representada a informação. Uma ideia matemática é compreendida se está ligada a redes existentes com fortes conexões. A compreensão pode ser vista como limitada se apenas algumas conexões estão feitas ou se estas são fracas. A compreensão aumenta com as relações estabelecidas por experiências enriquecedoras e com o crescimento das redes que pode ser visto como o acréscimo de novas representações ou como uma reorganização das representações já existentes.

Segundo Skemp (1976) duas palavras iguais com significados diferentes podem dar aso a confusão e podemos encontrar palavras destas no contexto da matemática e, na opinião do autor, estas estão na raiz de muitas das dificuldades na educação matemática. Um exemplo dessas palavras é a *compreensão*. Segundo Kotarbinski (1961), citado por Sierpinska (1994, frequentemente, o uso da palavra "compreender" é altamente ambíguo. O autor sempre entendeu compreensão como saber o que fazer e porquê. No entanto, Skemp (1976) tem em consideração dois tipos de compreensão: a *compreensão instrumental* e a *compreensão relacional*. O objetivo da compreensão instrumental é a aquisição de métodos para resolver satisfatoriamente um problemas. Neste tipo de compreensão privilegia-se não o porquê, mas o como, a que o autor chama ‘regras sem razões’ (Skemp, 1976). O objetivo da compreensão relacional é saber não só como é que o método funciona, mas também o porquê. Assim, torna-se possível extrapolar este método para a resolução de outros problemas.

Independentemente de qual das duas compreensões é a melhor e que deve ser proporcionada aos alunos, duas situações podem acontecer: o aluno quer compreender instrumentalmente ensinado por um professor que quer que os alunos compreendam relacionalmente ou o contrário. A primeira situação causará menos problemas aos alunos, mas será frustrante para o professor, pois os alunos procuram regras para obter as respostas. (Skemp, 1976)

Herscovics e Bergeron (1984), referidos por Domingos (2003), propõem um modelo constituído por quatro modos de compreensão: *compreensão intuitiva*, *compreensão de procedimentos*, *abstração matemática* e *formalização*. A compreensão intuitiva é um conhecimento informal e baseia-se em pré-conceitos e na perceção visual. A compreensão de procedimentos diz respeito à aquisição de procedimentos que podem ser associados ao conhecimento intuitivo e ser usados apropriadamente. A abstração matemática pode ser vista como a abstração no sentido habitual – afastamento de um representação – ou como a abstração no sentido matemático – a generalização. A formalização diz respeito às interpretações usuais da axiomática e à demonstração matemática formal.

Sierpinska (1994) considera que podem haver duas formas de compreensão para uma mesma coisa. Quando se diz que uma pessoa que sabe a tabuada sabe que ‘7 vezes 9 é 63’ tanto podemos querer dizer que a pessoa pensa em ‘9x7’ e ’63’ e considera-as iguais ou que é capaz de o fazer em qualquer altura, uma vez que já pensou sobre isso no passado. Assim, a autora procura caraterizar os *atos de compreensão* que são recursos para o conhecimento – experiências que ocorrem e rapidamente desaparecem. A autora considera que há atos de compreensão mas também uma compreensão.

Sierpinska (1994) refere diversos autores que se referem ao termo compreensão: Greeno usa a expressão: ‘para compreender o significado (de X)’, o que sugere que X tem um significado bem determinado e que o que há para entender é este significado pré-existente. Dewey considera 'compreender' e 'compreender o significado’ como expressões sinónimas e explica a compreensão através do significado (Dewey, 1971, p. 137).

Sierpinska (1994) parte da definição de Ajdukiewicz alterando o termo *expressão* por *objeto*. O ato de compreender um objeto não é mais do que fazer a ligação mental entre o objeto e um outro que pode ter apenas uma representação mental. O primeiro objeto é o *objeto de compreensão* e o segundo a *base da compreensão*.

Com base nesta definição, Sierpinska (1994) procura quais os critérios que nos permitem avaliar se realmente estamos a compreender algo. O primeiro critério é a *ordem e harmonia* – quando reconhecemos algo temos tendência a classificar, ordenar entre outros objetos e dar um nome; os atos de compreensão (até os mais primitivos) requerem este sentimento de ordem. Um segundo critério é uma *compreensão com base num pensamento unificado* – pode não se aplicar a todos os atos de compreensão mas quando se trata de compreender conceitos abstratos desempenha um papel importante. O terceiro critério é a *compreensão sistémica* – que tende para a simplificação na tentativa de formulação de leis gerais – e a *compreensão experiencial* – que tem como requisito experienciar a situação. Para a autora, estas compreensões devem ser encaradas como complementares uma da outra ao invés de as considerar como opostas. O quarto e último critério é o *fenomenalismo* e o *essencialismo* - muitas vezes temos a sensação de que não entendemos "realmente" alguma coisa, a menos que tenhamos atingido a sua essência.

Para Ajdukiewicz, mencionado por Sierpinska (1994), um ato de compreender uma expressão tem sempre uma base numa representação mental e considera dois tipos de representações: a *imagem mental* e os *conceitos*. Assim, a *aperceção* – tomada de consciência de propriedades que não são tidas em conta nos atos de compreensão – e os *pensamentos porque sim* (Sierpinska, 1994) são outras componentes que estão na base da compreensão.

Segundo Domingos (2003) a diferença entre o modelo proposto por Sierpinska e os modelos apresentados por Skemp e Herscovics e Bergeron é de que se pode estabelecer uma caraterização das componentes dos níveis de compreensão em vez de se estabelecer uma hierarquia entre estes.

Wertsch (1991) defende uma dimensão da compreensão relacionada com a comunicação e recorre à *voz* para suportar a ideia de que a mente de um indivíduo funciona com base em processos sociais relacionados com a comunicação. No *ventriloquismo* existe uma interferência de uma voz noutra – antes de um indivíduo se apoderar de uma palavra, esta é retirada de outras pessoas ou de outros contextos. Isto acontece frequentemente na sala de aula uma vez que os alunos são capazes de mencionar coisas verbalmente mas não são capazes de lhes dar significado.

2.2. Teorias Cognitivas

Neste tópico apresentam-se quatro teorias cognitivas: Conceito imagem e Conceito definição de Sholmo Vinner, a Teoria da Reificação de Anna Sfard, a Teoria APOS de Ed Dubinsky e os Três Mundos da Matemática de David Tall.

2.2.1. Conceito imagem e conceito definição

Os principais impulsionadores desta visão são Shlomo Vinner e David Tall. Vinner apresenta uma distinção entre as duas noções. Tall trabalha em colaboração com Vinner nesta temática mas considera que a distinção entre estas noções não deve ser feita de modo exclusivo mas que o conceito imagem deve ter o conceito definição como uma sua parte.

Segundo Tall (2003), os termos *conceito imagem* e *conceito definição* foram formulados por Vinner, em 1980 e, conjuntamente, em 1981 publicaram o *paper* "Conceito Imagem e Conceito Definição". Esta publicação levou ao surgimento de dois significados para "conceito imagem" pois a definição de Vinner tinha uma base filosófica e a de Tall tinha uma base mais humana pelo que enquanto Vinner falava de mente e cérebro separadamente, Tall considerava que a mente era a forma como o cérebro funciona. Segundo Tall (2003), Vinner considera o conceito imagem e o conceito definição como duas coisas distintas enquanto o autor considera o conceito imagem como parte do conceito definição.

Para Tall e Vinner (1981) muitos conceitos que usamos não estão formalmente definidos e nós aprendemos a reconhecê-los com a experiência e com a sua utilização em contextos apropriados. Mais tarde, os significados destes conceitos podem ser refinados e interpretados com ou sem uma definição precisa. Normalmente, neste processo, é dado ao conceito um símbolo ou o nome que faz com que este possa ser comunicado e que auxilia na sua manipulação mental.

Segundo Vinner (1983) há duas dificuldades para lidar com a questão da formação dos conceitos: primeiro, com a noção do próprio conceito e, seguidamente, com a determinação de quando é que um conceito está corretamente constituído na mente de alguém. Um modelo explicativo deste processo tem na sua base as noções de *conceito imagem* e *conceito definição*.

Segundo Tall e Vinner (1981) devemos usar o termo *conceito imagem* para descrever a estrutura cognitiva que está associada ao conceito. O conceito imagem é algo não-verbal que está associado ao nome do conceito e pode ter uma representação do conceito no caso de este ter uma representação visual.

Como o conceito imagem se desenvolve, este não precisa de ser coerente em todos os seus momentos. Os *inputs* sensoriais excitam certas vias neurais e inibem outras e, desta forma, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da imagem do conceito e desenvolvê-las. Os autores chamam à parte do conceito imagem, que é ativado num determinado momento, o *conceito imagem evocado*. Em momentos diferentes, imagens aparentemente contraditórias podem ser evocadas. Quando aspectos contraditórios são evocados simultaneamente é precisa haver um sentido de conflito ou confusão. Apenas se pode falar do conceito imagem em relação a um indivíduo específico embora o mesmo indivíduo possa reagir diferentemente ao mesmo termo, dependendo das situações. O termo conceito imagem é usado, então, para descrever a estrutura cognitiva que abrange todas as imagens mentais associadas a um conceito (Tall e Vinner, 1981).

Tall e Vinner (1981) consideram o *conceito definição* como as palavras usadas para especificar o conceito. Pode ser aprendido por um indivíduo mecanicamente ou, mais significativamente, aprendido e relacionado com o conceito como um todo. Pode também ser uma reconstrução pessoal de uma definição. O conceito definição é assim a definição verbal que explica o conceito de um modo exato (Vinner, 1983).

Segundo Vinner (1991), referido por Domingo (2003), para adquirirmos um conceito precisamos de, primeiro, formar um conceito imagem do mesmo. Apenas o conhecimento da sua definição não nos garante a total compreensão do conceito e para isso precisamos de ter um conceito imagem.

Segundo Domingos (2003), para alguns conceitos possuímos em simultâneo um conceito definição e um conceito imagem. Mas isso não acontece com todos os conceitos: por exemplo os conceitos de *casa* ou *laranja* não foram adquiridos por meio de uma definição e, no entanto, temos conceitos imagem bastante claros deste tipo de objetos. No entanto, alguns conceitos podem ser introduzidos através da sua definição que ajuda na formação do conceito imagem.

Com base nesta formulação, Vinner (1983) distingue a *aprendizagem informal* da *aprendizagem formal*. Na aprendizagem informal, para podermos lidar com os conceitos precisamos de conceitos imagem e não de conceitos definição, que podem ser esquecidos. Na aprendizagem formal o conceito definição aparece com bastante importância nos vários níveis de ensino.

Baseado na especificação do conceito definição e conceito imagem e na relação entre ambos, Vinner (1983, 1991) elabora um modelo explicativo da construção do conhecimento matemático e para cada conceito assume a existência de uma célula que pode estar vazia.

Pode considerar-se que a célula do conceito imagem está vazia quando não há um significado associado ao conceito, o que acontece quando o conceito definição é memorizado sem significado para quem o memoriza.

O modelo de Vinner prevê que haja interação entre as duas células embora estas se possam constituir de forma independente. Quando um conceito é introduzido por meio da sua definição, a célula do conceito imagem está inicialmente vazia e vai sendo gradualmente preenchida com exemplos que vão sendo dados. Vinner (1983) considera desejável que o conceito definição seja a base para a formação do conceito imagem e que o controle completamente.

Segundo Domingos (2003), quando se propõe ao aluno uma tarefa cognitiva as células do conceito imagem e do conceito definição devem ser ativadas para encontrar uma resposta a essa tarefa. Esta atividade pode desencadear várias ações entre as células. Uma primeira ação pode traduzir-se numa consulta à célula do conceito definição seguida de uma ação recíproca entre ambas. Uma segunda possibilidade é apenas a consulta da célula do conceito definição e, neste caso o conceito imagem não tem qualquer interferência na resposta – pode considerar-se que se trata de um processo cognitivo que assenta numa *dedução formal pura*. Uma terceira ação que pode ser desencadeada está relacionada com uma consulta de ambas as células – primeiro à célula do conceito imagem e, em seguida, à do conceito definição e, neste caso estamos perante uma *dedução que segue um* *pensamento intuitivo*. Em nenhum dos casos anteriores é tomada uma decisão sem antes ser consultado o conceito definição.

Segundo Vinner (1983) algumas definições são demasiado complicadas de abordar não ajudando a conceção de conceitos imagem na mente dos alunos. No entanto, há definições que, quando apoiadas por exemplos específicos, podem fazer sentido num dado momento mas que podem ser esquecidas ou permanecer inativas a partir da altura em que os alunos formam o seu conceito imagem.

O modelo para o processo que realmente ocorre na prática baseia-se apenas na consulta do conceito imagem seguido de uma resposta intuitiva. Nesta resposta intuitiva, a célula do conceito definição não é consultada no processo da resolução de problemas, independentemente de estar ou não vazia. Assim, para evitar que isto aconteça, deve recorrer-se a problemas não rotineiros para os quais o conceito imagem é insuficiente para a sua resolução.

Outra noção a ter em consideração é a de *conceito imagem temporário*. Segundo Vinner (1983), em algumas tarefas, apenas partes do conceito imagem ou do conceito definição são ativadas, podendo, assim, falar-se da ativação de uma parte da célula.

A *compartimentação* é outra ideia a ter em conta (Vinner e Dreyfus, 1989) e este fenómeno ocorre quando um aluno tem dois esquemas diferentes que são potencialmente contraditórios ou incompatíveis na sua estrutura cognitiva. Certas situações estimulam um esquema e outras situações estimulam o outro. Um comportamento inconsistente não é a única indicação de compartimentação. Por vezes, uma determinada situação não estimula o esquema que é mais relevante para essa situação. Um comportamento que pode ser considerado um caso de compartimentação é, por exemplo, quando um aluno é capaz de referir a definição formal de função mas quando surge no contexto de tarefas de construção o seu comportamento pode basear-se no seu conceito imagem de fórmula ou gráfico.

Os termos conceito definição e conceito imagem são, para Vinner, centrais na explicação do processo cognitivo da formação dos conceitos. Tall também recorre a estes termos, nomeadamente em 1981. No entanto há algumas diferenças nas abordagens.

Segundo Tall (2003), para Vinner, o conceito imagem é uma experiência mental que resulta da procura da análise do que acontece quando os alunos se focam diferentemente nas imagens e nas definições, podendo induzir-se que a mente e o cérebro estão separados. Para Tall a mente é vista como uma parte do cérebro sendo esta a forma como o cérebro trabalha.

Assim, Tall (2003) considera que o conceito definição é uma parte do conceito imagem, ao contrário do proposto por Vinner, de que existe uma separação entre os conceitos imagem e definição. Para Tall, o conceito imagem descreve a estrutura cognitiva que é associada ao conceito enquanto o conceito definição não é apenas a definição do conceito. O conceito definição pode ser uma reconstrução pessoal da definição assumindo a forma das palavras que o indivíduo usa para descrever o seu conceito imagem. Quer este conceito seja dado ao indivíduo ou seja por ele construído, este pode variar ao longo do tempo, pelo que o *conceito definição pessoal* pode ser diferente do *conceito definição formal*.

Tall e Vinner (1981) consideram ser possível falar de *imagem do conceito definição* como uma parte do conceito imagem pois para cada indivíduo, o conceito definição gera o seu próprio conceito imagem.

2.2.2. Teoria da Reificação

Segundo (Sfard, 1987, 1991, 1992; Sfard e Linchevki, 1994) as noções abstratas podem ser concebidas *estruturalmente* – como objetos – ou *operacionalmente* – como processos. Estas abordagens, embora incompatíveis, são complementares. A distinção entre estes modelos de pensamento é delicada e nem sempre é fácil de fazer.

Sfard (1991) considera que ao contrário de objetos materiais, os constructos matemáticos avançados são inacessíveis aos nossos sentidos. A possibilidade de alguém ser capaz de visualizar estes objetos parece ser uma componente essencial da capacidade matemática, enquanto a ausência desta capacidade pode ser uma das razões para o facto de a matemática parecer tão inacessível para muitas "mentes bem formadas" (Sfard, 1991, p.3). A autora designa este tipo de conceção como *conceção estrutural* – capacidade de ver uma entidade matemática como se fosse uma coisa real, que existe no tempo e no espaço.

Por exemplo, em vez de definir uma função como um conjunto de pares ordenados, esta aparece ligada a um certo processo computacional ou como um método de obter um sistema de outro. Este tipo de abordagem refere-se essencialmente a *processos*, *algoritmos e ações* refletindo uma *concepção operacional* da noção (Sfard, 1991).

Enquanto a concepção estrutural é estática, instantânea e integrativa, a operacional é dinâmica, sequencial e detalhada. Apesar das diferenças entre as duas concepções a autora considera que elas não são mutuamente exclusivas. Embora ostensivamente incompatíveis, elas são de facto complementares e indispensáveis para uma compreensão profunda da Matemática.

Segundo Sfard (1991) é possível encontrar na literatura um vasto conjunto de dicotomias na caracterização do universo matemático: para Halmos a matemática pode ser abstracta ou algorítmica, para Anderson pode ser declarativa ou processual, Piaget faz distinção entre figurativa e operativa, Skemp distingue entre instrumental e relacional, etc.

A delimitação entre *estrutural e operacional* feita por Sfard apresenta duas características que a distinguem das anteriores: a sua natureza ontológico-psicológica combinada e a sua complementaridade. As vantagens desta abordagem estão no facto de se focar na natureza das entidades matemáticas (resultado ontológico) tal como são percebidas pelo indivíduo (perspectiva psicológica) e, ao contrário das distinções feitas pelos outros autores, em vez de decompor o conhecimento em componentes distintas, esta procura uma abordagem onde predomina a complementaridade das duas perspectivas. É neste sentido que Sfard prefere falar de *dualidade* em vez de *dicotomia*, quando se refere às concepções estrutural e operacional.

Sfard (1991, 1994) defende que a conceção operacional deve preceder a conceção estrutural e para isso usa como exemplo a noção de número e mostra como a conceção operacional já existe antes da conceção estrutural.

Sfard (1991) apresenta um esquema que mostra o desenvolvimento do conceito de número (figura 4) e cada segmento representa um processo que é composto por três fases: um *estádio pré-conceptual* – onde se usam operações sobre números já conhecidas –, um *período de abordagem operacional* – novo tipo de número começa a surgir e é introduzido um nome fictício para esse novo número – e a *fase estrutural* – quando o número é aceite como um objeto matemático acabado.

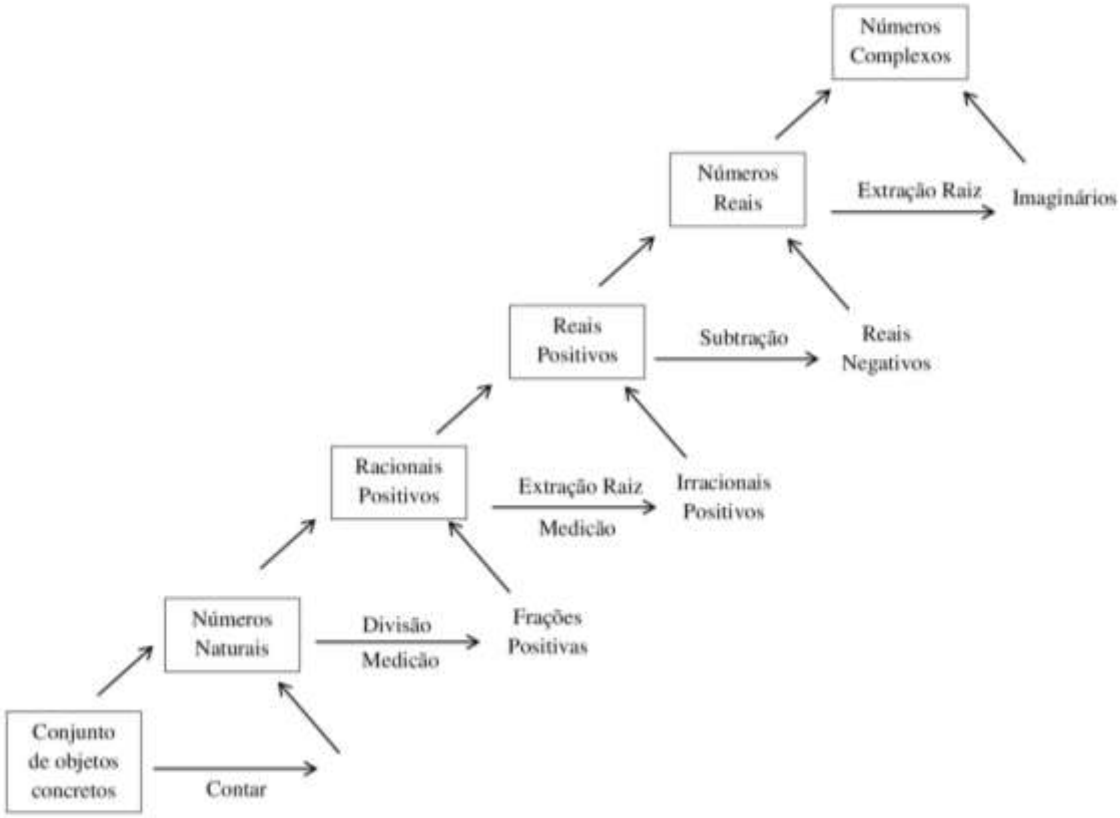


Figura 4 – Desenvolvimento do conceito de número segundo Sfard. (1991, p. 13)

Segundo Sfard (1992), quando uma noção é ensinada estruturalmente podem ocorrer sérios problemas na sala de aula. Quando se tenta abafar a origem das dificuldades dos estudantes, conjetura-se que em alguns casos a chave para o problema pode estar na incapacidade dos alunos para criar para si os objetos abstratos sobre os quais o professor fala com uma confiança inabalável. Para um estudante as noções mais básicas dos conjuntos ou dos elementos podem parecer muito confusos e amorfos para serem usados e operados com confiança.

A afirmação sobre a precedência da conceção operacional em relação à estrutural implica que certos tipos de ações de instrução, no entanto naturais e legítimas aos olhos dos professores, devem ser cuidadosamente evitados. Dois princípios didáticos podem ser formulados a respeito das coisas que não devem ser feitas:

- Princípio I – Novos conceitos não devem ser introduzidos de forma estrutural
- Princípio II – Não deve ser requerida uma conceção estrutural se o aluno conseguir trabalhar sem esta.

Analisando os diversos estádios da formação dos conceitos, Sfard (1991) conclui que a passagem do modo operacional para os objetos abstratos é um longo processo composto por três fases que correspondem a três níveis de estruturação crescente: a *interiorização* – fase em que o indivíduo se familiariza com os processos –, a *condensação* – nesta fase os indivíduos são mais capazes de pensar sobre um processo sem precisar de detalhes; é nesta fase que surgem novos conceitos – e a *reificação* – súbita capacidade de ver uma nova entidade matemática como um objeto autónomo. As fases da interiorização e da condensação são fases de mudanças graduais, e a reificação é um processo instantâneo.

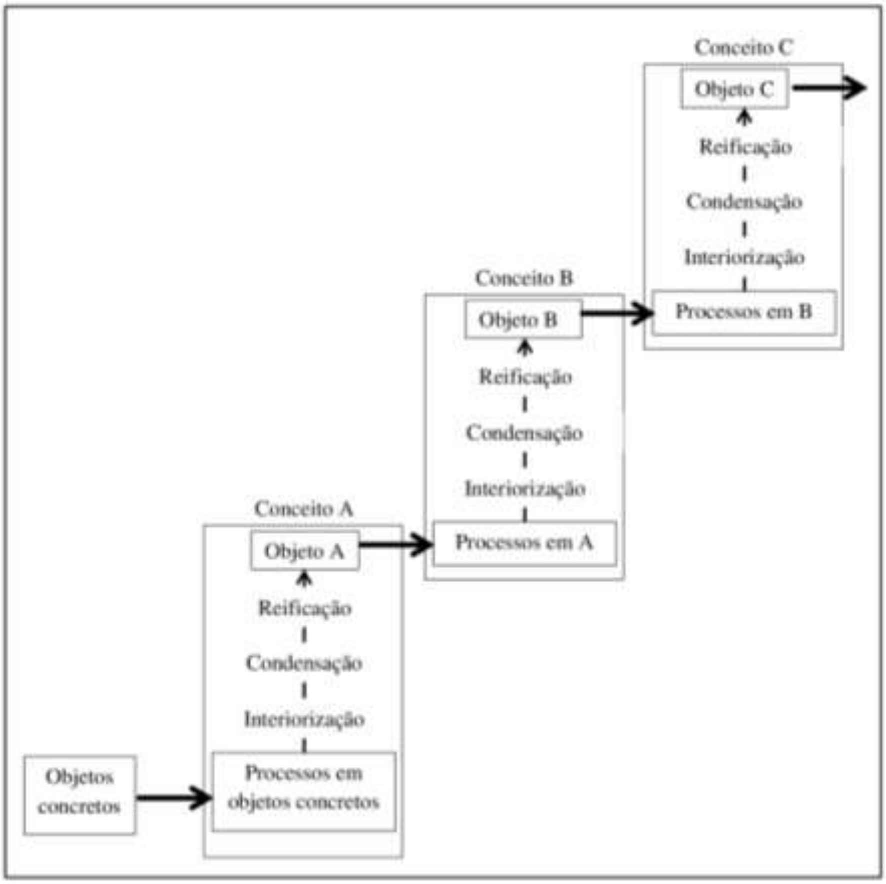


Figura 5 – Modelo de formação dos conceitos. (Sfard, 1991, p. 22)

2.2.3. Teoria APOS

O acrónimo APOS surge de *Action*, *Process*, *Object* and *Schema* (Ação, Processo, Objeto e Esquema). Esta teoria é uma teoria de como os conceitos matemáticos podem ser aprendidos (Arnon et al., 2004).

Em Cottrill et al. (1996) pode ler-se uma descrição de cada um dos conceitos que dão origem ao acrónimo:

- Uma *ação* é uma transformação, física ou mental, de objetos para obter outros objetos. Ocorre como reação a estímulos e pode tratar-se de uma resposta simples, como um reflexo.
- Um *processo* é a transformação de um objeto por parte do indivíduo, na medida em que este é capaz de descrever todos os passos da transformação sem ter de os realizar. Um processo pode ser revertido ou coordenado com outros processos. Através da reflexão sobre a transformação de processos, estes tornam-se objetos.
- Um *objeto* é o resultado do *encapsulamento* de um processo. Este encapsulamento é feito quando o sujeito está concentrado na totalidade do processo, percebe que transformações é que podem agir sobre este e é capaz de construir essas transformações. Os objetos podem ser "*desencapsulados"* obtendo os processos dos quais provieram.
- Um *esquema* é um conjunto de ações, processos e objetos e outros esquemas que estão ligados e permitem solucionar um dado problema. Refletindo e transformando um esquema, pode acontecer que este se transforme num objeto. Assim, podem ser consideradas duas formas de construir objetos: quer a partir de processos, quer a partir de esquemas.

Segundo Arnon et al. (2004) a Teoria APOS foca-se em modelos daquilo que pode acontecer na mente de um indivíduo quando está a tentar aprender um conceito matemático e usa esses modelos para projetar materiais de instrução e/ou avaliar sucessos de estudantes e falhas em lidar com problemas matemáticos.

Segundo Dubinsky (1991) a teoria APOS surgiu na tentativa de compreender o mecanismo da *abstração reflexiva*, introduzido por Piaget. A abstração reflexiva era vista por Piaget como o mecanismo principal para as construções mentais no desenvolvimento do pensamento e do mecanismo mental, pelo qual todas as estruturas lógico-matemáticos são desenvolvidas na mente de um indivíduo. A *abstração reflexiva* consiste em duas partes: a primeira parte envolve reflexão no sentido de consciência e de pensamento contemplativo, a que Piaget chamou o conteúdo e as operações nesse conteúdo e no sentido de refletir o conteúdo e as operações a partir de um nível ou estádio cognitivo inferior para um mais elevado (ou seja, a partir de processos para objetos). A segunda parte consiste na reconstrução e reorganização do conteúdo e das operações neste estágio mais elevado que resulta nas operações que se tornam num conteúdo onde novas operações podem ser aplicadas (Arnon et al., 2004).

Dubinsky (1991) baseia-se na teoria da construção cognitiva desenvolvida por Piaget e propõe a Teoria APOS para descrever como as *ações* são assimiladas em *processos*, posteriormente *capsuladas* como *objetos* mentais que têm um lugar em *esquemas* (figura 6). Nesta perspectiva, parte da distinção feita por Piaget que inclui três tipos de abstração: a *abstração empírica*, a *abstração pseudoempírica* e a *abstração reflexiva.*

A *abstração empírica* permite obter conhecimento a partir das propriedades dos objetos se for feita com experiências externas. Para Piaget este tipo de abstração leva a generalizações, que são a passagem do específico para o geral. A *abstração reflexiva* é alcançada a partir daquilo a que Piaget chama *coordenação geral das ações* e a fonte é o próprio sujeito. Este tipo de abstração leva a outra generalização que resulta numa síntese através da qual as leis particulares obtêm um significado. A *abstração pseudoempírica* partilha caraterísticas com as duas anteriores e permite obter propriedades do objeto que tenham sido introduzidas pelo sujeito.

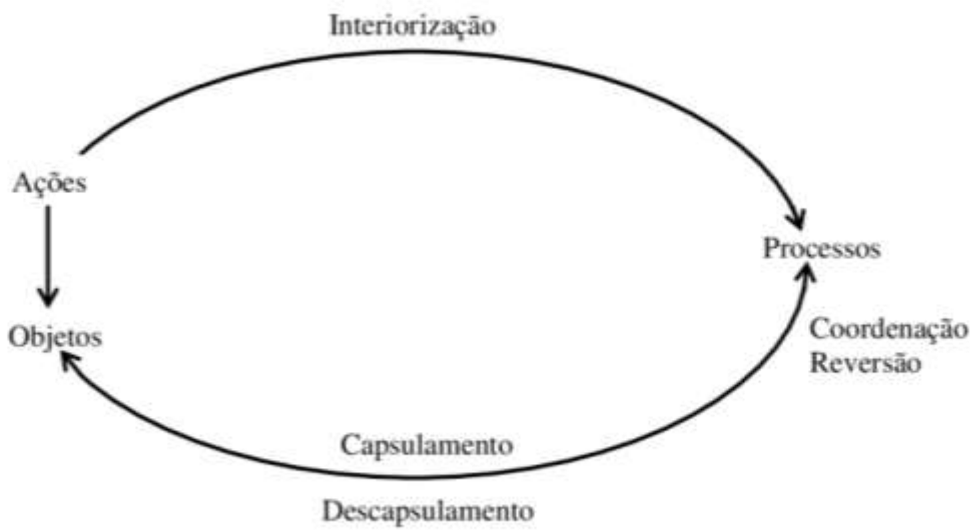


Figura 6 – Equemas e a sua construção. (Arnon et al., 2004, p.10)

2.2.4. Três Mundos da Matemática

O conceito de *proceito* surgiu da ideia de olhar para um símbolo como um processo e um conceito – por exemplo, o símbolo + pode representar um processo (adição) ou um conceito (soma). Assim, 3+2, 5 e 7-2 podem representar o mesmo proceito. Um proceito elementar é a mistura de três componentes: um *processo* que produz um *objecto matemático*, e um *símbolo* que é utilizado para representar qualquer um dos processos ou objecto. Um proceito consiste num conjunto de proceitos elementares que tenham o mesmo objecto (Tall, 2006).

Em trabalhos mais recentes Tall enquadra a teoria dos proceitos numa teoria mais ampla de "Três Mundos da Matemática".

Segundo Tall (2008), o desenvolvimento de um indivíduo desde criança até à idade adulta constrói-se sobre três aspetos: o *reconhecimento* de semelhanças, diferenças e padrões, a *repetição* de sequências de ações até se tornarem automáticas e a *linguagem* para descrever como pensamos acerca das coisas. Estes aspetos levam ao desenvolvimento de cada um dos três mundos da matemática que crescem de um modo mais sofisticado e interligado consoante o indivíduo amadurece. (Tall, 2013)

O reconhecimento e categorização de figuras e formas sustentam experiências mentais com geometria e gráficos, enquanto a repetição de sequências de ações simbolizada como conceitos pensáveis leva à aritmética e álgebra. Cada um destes processos de construção desenvolve-se ainda mais através do uso de uma linguagem para descrever, definir e deduzir relações, até que, ao mais alto nível, uma linguagem teórica é usada como uma base para uma teoria matemática formal.(Tall, 2008)

Durante a sua pesquisa, Tall (2013) encontrou três maneiras fundamentalmente diferentes de operação: uma de incorporação física e mental que inclui a ação e o uso do sentido visual e outros, uma segunda através do uso de símbolos matemáticos que operam como processo e conceito (proceitos) na aritmética, álgebra e cálculo simbólico, e uma terceira que usa uma linguagem formal cada vez mais sofisticada em pensamento matemático avançado.

Tall começou a perceber que a noção de três mundos diferentes da matemática ofereceu uma categorização útil para diferentes tipos de contexto matemático. Cada um tem o seu próprio estilo individual de crescimento cognitivo, uma maneira diferente de usar a linguagem e, juntos, abrangem uma vasta gama de atividade matemática.

Os três mundos considerados por Tall (2008, 2013) são o *conceptual-corpóreo*, o *proceptual-simbólico* e o *axiomático-formal* que se desenvolvem de diferentes maneiras.

- *Mundo conceptual-corpóreo* - com base na percepção e reflexão sobre as propriedades dos objetos, inicialmente visto e percebido no mundo real mas depois é imaginado na mente;
- *Mundo proceptual-simbólico* - cresce fora do mundo copóreo por meio de ação (como a contagem) e é simbolizado como conceitos pensáveis (tais como o número) que funcionam tanto como processos para fazer, como como conceitos para pensar sobre;
- *Mundo axiomático-formal* - com base em definições formais e prova, inverte a sequência de construção de sentido a partir de definições com base em objetos conhecidos para conceitos formais.

Segundo Tall (2008), conceptualmente, associamos uma figura geométrica, como um triângulo formado por três segmentos retos; imaginamos o triângulo como uma figura e permitir que um triângulo específico atue como um protótipo para representar toda a classe dos triângulos. Quando os sistemas são axiomáticas e as propriedades deduzidas somente a partir dos axiomas usando demonstrações teóricas formais é que o desenvolvimento cognitivo da geometria muda totalmente para uma abordagem formal-axiomática (Figura 7).

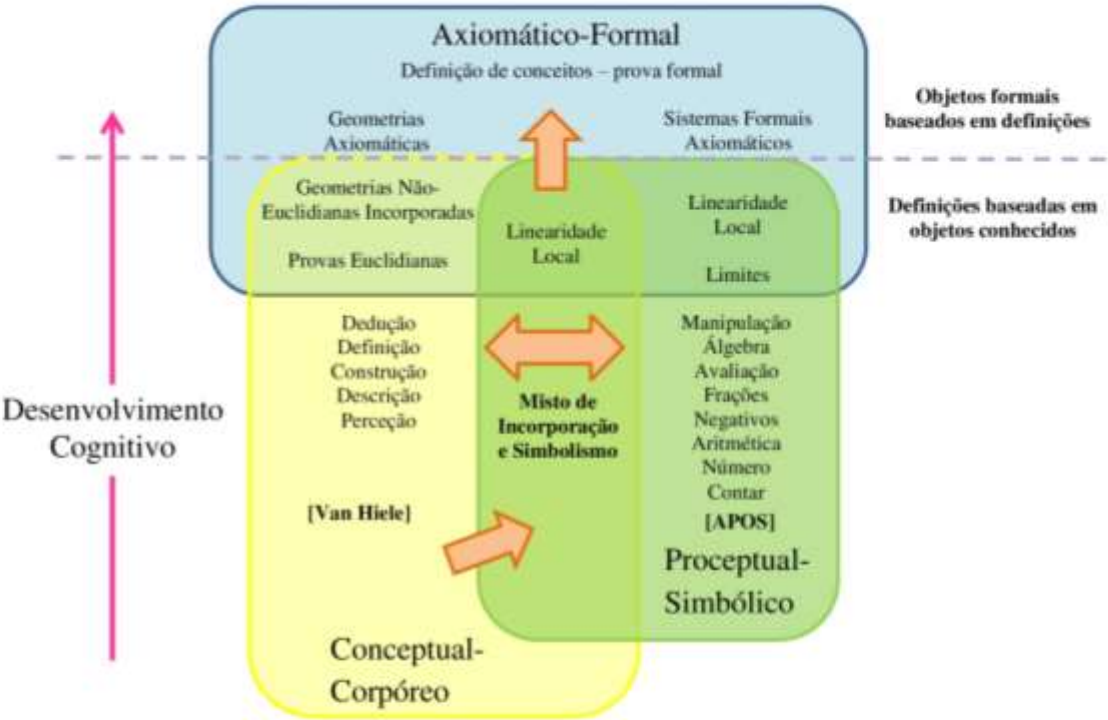


Figura 7 – Desenvolvimento conceptual através dos três mundos da matemática. (Tall, 2008; p.4)

Segundo Tall (2008), o Formalismo Axiomático refere-se ao formalismo de Hilbert que vai além das operações formais de Piaget. A principal distinção em relação à matemática elementar de incorporação e simbolismo é que na matemática elementar, as definições surgem a partir da experiência com objetos cujas propriedades são descritas e utilizadas como definições; na matemática formal, apresentações formais começam com definições teóricas e deduzem-se outras propriedades usando a demonstração formal.

É importante discutir a inter-relação dos mundos quando funcionam em conjunto. No entanto, a junção de dois nomes, tais como "formalismo axiomático conceitualmente corpóreo" pode ser inapropriado e é necessária compressão. Assim refere-se aos três mundos simplesmente como *corpóreo*, *simbólico* e *formal*, usando os significados para os termos estabelecidos acima, o que permite combiná-los para dar nomes como *formalismo corpóreo* quando o pensamento formal é sustentado por incorporação. (Tall, 2008)

Assim, a estrutura geral da figura 7 pode ser visto como uma combinação de mundos interativos de matemática (figura 8).

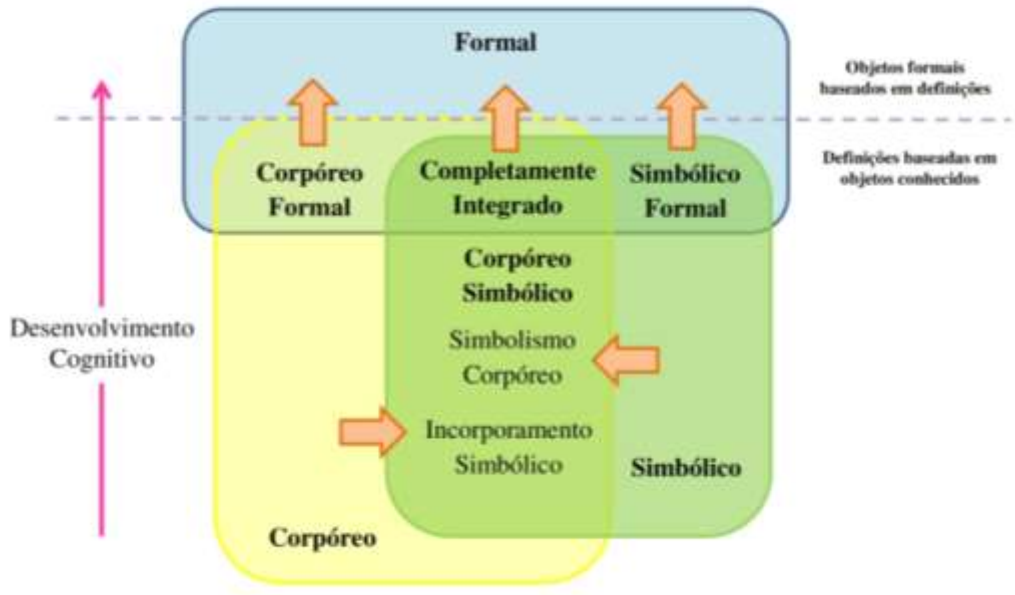


Figura 8 – Desenvolvimento conceptual através dos três mundos da matemática. (Tall, 2008; p.5)

2.3. Categorização

Domingos (2003) estabelece três níveis de categorização para distinguir diferentes tipos de conceito imagem na mente do aluno. Os três níveis diferentes de conceitos imagem nos alunos considerados são *conceito imagem incipiente, conceito imagem instrumental* e *conceito imagem relacional*.

Para caracterizar estes níveis de complexidade o autor tem conta diferentes domínios utilizados no desenvolvimento de várias teorias cognitivas. São eles os objetos, os processos, a tradução entre representações, as principais propriedades e o pensamento proceptual.

Estes níveis de complexidade dos conceitos imagem revelam a existência de numa *hierarquia* dos conceitos imagem mais elementares (incipientes) para conceitos imagem mais avançados (relacionais).

Nos níveis de conceito imagem identificados pode verificar-se a existência de uma *estabilidade*, que reflete a permanência da compreensão de um aluno num mesmo nível; pode ser observada ao nível do conceito imagem relacional ou conceito imagem incipiente sendo que quando esta propriedade se verifica ao nível dos conceitos imagem relacionais então temos uma situação em que os alunos manifestam uma compreensão efetiva dos conceitos. Quando ocorre ao nível dos conceitos imagem incipientes pode considerar-se que os alunos não encaram os conceitos como objetos matemáticos.

Nestes níveis pode ainda verificar-se uma certa *oscilação*, no que diz respeito à forma como as propriedades de um conceito são estabelecidas. Embora os alunos estejam num determinado nível de conceito imagem podem apresentar oscilações na forma como utilizam as diferentes propriedades deste.

2.3.1. Conceito imagem incipiente

Os conceitos imagem incipientes são muito incompletos e referem-se a objetos elementares que por si só não traduzem o conceito pretendido e referem apenas algumas características mais notórias do objeto matemático o que dificulta o estabelecimento de relações significativas entre os mesmos.

Os *objetos matemáticos* que os alunos utilizam são quase sempre de nível elementar e os *processos* utilizados são elementares e o grau de coordenação entre estes é quase sempre fraco. A *tradução entre representações* é feita com base em processos e procedimentos elementares, que ocasionalmente são coordenados de forma adequada, mas que não permitem uma compreensão do conceito.

As principais *propriedades* que os alunos evocam neste nível são baseadas na memorização não sendo os alunos capazes de lhes dar significado, embora as consigam referir verbalmente. *O pensamento proceptual* evidenciado neste nível diz respeito a uma utilização dos símbolos que apenas podem representar objetos matemáticos elementares. Os alunos conseguem utilizar alguns proceitos elementares e recuperar os processos que lhes estão subjacentes sempre que seja necessário.

2.3.2. Conceito imagem instrumental

Os conceitos imagem instrumentais permitem utilizar alguns objetos matemáticos que estão na base do conceito em estudo. Neste nível de compreensão podem encontrar-se objetos mais complexos que estão na base dos conceitos abordados e é possível estabelecer processos que conduzam à construção de novos conceitos. No entanto, muitas vezes, estes objetos não são suficientes para que seja possível a realização da interiorização e da condensação e posterior reificação do conceito. Podem identificar-se alguns processos realizados sobre os objetos, mas a ausência de coordenação entre estes impede que possam ser capsulados em novos objetos.

Os *objetos matemáticos* são quase sempre elementares, não sendo possível gerar processos que possam ser coordenados e capsulados no novo conceito em estudo. No que diz respeito aos *processos* é possível observar situações em que estes são interiorizados e condensados resultando na criação de novos objetos. A *tradução entre representações* é feita com base num conjunto de procedimentos e processos que por vezes já foram interiorizados, mas que ainda não foram condensados em unidades possíveis de reificar.

As *propriedades* são usadas com compreensão sendo mencionadas com o estatuto de objetos matemáticos. No domínio do *pensamento proceptual*, os objetos matemáticos mais elementares são representados como proceitos e os alunos dão o significado pretendido à representação simbólica; no caso dos conceitos mais complexos, para os quais a tradução simbólica se torna necessária para a compreensão, os símbolos são usados de modo operacional.

2.3.3. Conceito imagem relacional

Os conceitos imagem apresentados neste nível são quase sempre representativos de conceitos abordados de forma estrutural, isto é, como objetos matemáticos, para além dos processos que estiveram na sua origem, sendo os alunos capazes de recorrer a esses processos sempre que necessário.

Os conceitos são encarados como *objetos matemáticos* e são criados a partir da realização de processos sobre outros objetos, que são reificados depois de interiorizados e condensados. Relativamente aos *processos*, têm especial relevo os que resultam do descapsular dos objetos matemáticos. É neste nível que a capacidade de, a partir do objeto, conseguir aceder aos processos que lhe deram origem atinge a sua maior expressão, pelo que os alunos são capazes de lidar com um número maior de processos. No entanto os processos também podem ter origem através de uma coordenação entre eles com o objetivo de os capsular e formar novos objetos.

No domínio da *tradução entre representações* os alunos são capazes de efetuar traduções simbólicas dos conceitos, traduções estas que vão sendo menos eficientes consoante o grau de complexidade dos conceitos. Quando partem da representação simbólica, os alunos conseguem descapsular esse objecto em representações mais simples e este processo põe em evidência a capacidade de fazer a tradução entre várias representações. Relativamente às *propriedades*, muitas delas são enunciadas com compreensão e são usadas de forma estrutural, representando objetos matemáticos e verbalizadas a partir das definições formais.

2.4. Teoria das Inteligências Múltiplas

Segundo Nicholson-Nelson (1998), a teoria de Gardner resultou de extensas pesquisas sobre o cérebro que incluiam entrevistas, testes e pesquisas em centenas de pessoas. Estudou os perfis cognitivos de vítimas de acidentes vasculares cerebrais, autistas, indivíduos com dificuldades de aprendizagem, entre outros. Concluiu que a inteligência não é uma característica inata fixa que domina todas as habilidades e capacidades de resolução de problemas que os alunos possuem. A teoria de Gardner não questiona a existência de uma inteligência geral, mas investiga as possibilidades de inteligências não abrangidas por um conceito.

Para Gardner (2006) a competência cognitiva humana é melhor descrita em termos de um conjunto de habilidades, talentos ou habilidades mentais às quais chama inteligências. Todos os indivíduos possuem essas inteligências, mas diferem no grau de habilidade e da natureza da sua combinação.

A teoria das inteligências múltiplas começa a divergir a partir de pontos de vista tradicionais relativamente ao que constitui a inteligência. Na visão psicométrica clássica, a inteligência é definida como a capacidade de responder a questões em testes de inteligência. A inferência a partir dos resultados comprova a noção de que a inteligência não varia muito com a idade, formação ou experiência. Isto é um atributo inato ou faculdade do indivíduo. (Gardner 2006)

Segundo Gardner (2006), uma inteligência deve ser suscetível a uma codificação num sistema de símbolos. A língua, a representação figurativa e a matemática são três sistemas de símbolos que são necessárias para a sobrevivência humana e produtividade. A relação de uma inteligência com um sistema simbólico humano não é por acaso - a existência de uma capacidade computacional antecipa a criação real ou potencial de um sistema de símbolos que explora essa capacidade.

As Inteligências Múltiplas apresentadas por Gardner no início de 1980 foram a, Musical, a Corporal-cinestésica, a Lógico-matemática, a Linguística/Verbal, a Espacial/Visual, a Interpessoal e a Intrapessoal.

Durante os primeiros dez anos após a proposta da teoria das inteligências múltiplas, Gardner resistiu à tentação de alterar a teoria. No entanto, dois fatores levaram o autor a considerar duas inteligências adicionais. Primeiro, porque depois de falar com um grupo de historiadores um aproximou-se e disse: "Você nunca vai explicar Charles Darwin com o conjunto de inteligências que propõe"; o outro fator foi a afirmação frequente de que havia uma inteligência espiritual. Estas experiências levaram o autor a considerar as inteligências naturalista e espiritual/existencial.

McKenzie (2005) e Nisholson-Nelson (1998) apresentam uma descrição de cada uma destas inteligências. A **Inteligência Musical** é uma inteligência de padrões, incluindo canções, poesia, instrumentos, sons ambientais, e ritmos e baseada em padrões permite aos alunos dar sentido ao seu ambiente. Como a matemática é definida como o estudo de padrões, este é o domínio do ensino da matemática. A **Inteligência Cinestésica** é a inteligência estimulada pela interação física ativa com o ambiente de cada um e é promovida através de atividades motoras finas e grossas. Alunos com uma forte inteligência cinestésica podem parecer hiperativos na sala de aula tradicional. A **Inteligência Verbal** é fortemente enfatizada na sala de aula pois coincide com as formas tradicionais como se ensina: recitação, livros didáticos e de trabalho no quadro. A **Inteligência Visual** promove o raciocínio espacial através do uso de tabelas, gráficos, e muitos outros materiais. Esta inteligência visual permite que os alunos formem ideias e soluções para problemas nas suas mentes antes de tentar verbalizá-los ou colocá-los em prática. **A Inteligência Interpessoal** é estimulada pela interação com os outros. Alunos com uma forte tendência interpessoal podem ser considerados muito faladores ou excessivamente sociais, na sala de aula tradicional. A **Inteligência Intrapessoal** é uma inteligência de sentimentos, valores e atitudes. Esta inteligência ajuda o aluno a fazer uma ligação afetiva com o currículo. Alunos com esta inteligência desenvolvida têm bons instintos sobre seus pontos fortes e habilidades. A **Inteligência Naturalista** é uma inteligência de categorias e hierarquias. A inteligência naturalista considera os processos que estas disciplinas promovem e exigem: a classificação, categorização e estruturas hierárquicas. A **Inteligência Existencial** é uma inteligência de processos de compreensão dentro de um contexto existencial maior. Alunos com uma forte inteligência existencial têm a capacidade de resumir e sintetizar ideias de muitas disciplinas e fontes.

A **Inteligência Lógica** é muito valorizada no ensino tradicional – não é simplesmente a inteligência da matemática, mas da lógica e do raciocínio. Esta inteligência permite-nos ser solucionadores de problemas.

Segundo Nicholson-Nelson (1998), uma pessoa com uma inteligência Lógica-Matemática desenvolvida é forte em matemática, no raciocínio lógico e resolução de problemas. Gosta de resolver problemas, trabalhar com números e experimentos. Uma pessoa com esta inteligência desenvolvida aprende melhor através do trabalho com padrões e relações, classificação e categorização e o trabalho com a abstração. Exemplos conhecidos são Albert Einstein, John Dewey e Susanne Langer.

3. Metodologia

No presente capítulo faz-se uma apresentação da metodologia usada. A investigação segue uma metodologia de índole qualitativa tendo como método o estudo de caso. A recolha de dados recorre a entrevistas semiestruturadas, baseadas em tarefas, à análise documental e à observação participante e não participante.

3.1. Investigação Qualitativa

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a expressão investigação qualitativa é usada como um termo genérico no qual se agrupam diversas estratégias de investigação, que têm características em comum. Os dados recolhidos são ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico. Segundo Cohen et al. (2007), a análise qualitativa dos dados envolve uma organização, apresentando e explicando os dados. Muitas vezes a interpretação de dados qualitativos é difícil pois tem de se ter em consideração que existem, frequentemente, múltiplas interpretações que podem ser feitas sobre os mesmos dados.

Em investigação qualitativa, uma das estratégias utilizadas baseia-se no pressuposto de que muito pouco se sabe acerca das pessoas e ambientes que irão constituir o objecto de estudo. Os investigadores esforçam-se, intelectualmente, por eliminar os seus preconceitos. Após a conclusão do estudo faz-se a narração dos factos, tal como se passaram. Quando iniciam um trabalho, ainda que os investigadores possam ter uma ideia do que irão fazer, não delineiam um plano muito detalhado antes da recolha dos dados. Além disso, o investigador qualitativo evita iniciar um estudo com hipóteses previamente formuladas para testar ou questões específicas para responder, defendendo que a formulação das questões deve ser resultante da recolha de dados e não efectuada *a priori*. O que estrutura a investigação é o próprio estudo e não ideias preconcebidas ou um plano prévio detalhado (Bogdan e Biklen, 1994). A investigação qualitativa, tende a concentrar-se num número menor de pessoas do que a investigação quantitativa, mas os dados tendem a ser detalhados e ricos. Os investigadores têm de decidir, por exemplo, se apresentam dados relativos de cada indivíduo, e, em seguida, apresentam questões fundamentais emergentes entre os indivíduos, ou se devem trabalhar dentro de um quadro analítico pré-determinado de questões (Cohen et al., 2007).

Segundo Bogdan e Biklen, (1994) a investigação qualitativa possui cinco características principais e não têm que estar todas presentes numa investigação com o mesmo nível de profundidade. Assim, nem todos os estudos considerados qualitativos apresentam estas características e alguns deles são desprovidos de algumas delas. Os estudos que recorrem à observação participante e à entrevista em profundidade tendem a ser bons exemplos. Apresentam-se de seguida as cinco características referidas por Bogdan e Biklen (1994):

1. A fonte direta de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal: os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo e entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando observadas no seu ambiente habitual de ocorrência e os locais têm de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem;

2. A investigação qualitativa é descritiva: os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números e os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, entre outros registos. Os investigadores qualitativos tentam analisar os dados respeitando a forma como estes foram registados ou transcritos;

3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos: as técnicas quantitativas conseguem demonstrar, recorrendo a pré e pós-testes, que as mudanças se verificam. As estratégias qualitativas mostraram como as expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diárias.

4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva: não recolhem dados com o objetivo de confirmar hipóteses construídas previamente. Uma teoria desenvolvida deste modo procede de "baixo para cima", baseada em muitas informações recolhidas que são inter-relacionadas. O processo de análise dos dados é como um funil: as coisas estão abertas de início e vão-se tornando mais fechadas e específicas. O investigador qualitativo não presume que se sabe o suficiente para reconhecer as questões importantes antes de efetuar a investigação.

5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa: os investigadores que fazem este tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão

sentido às suas vidas. Uma investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre o investigador e os respetivos sujeitos.

No presente estudo pretende-se caracterizar a forma como os conceitos de lógica são interiorizados pelos alunos e compreender como é que estes os aplicam quando resolvem tarefas matemáticas. Partindo de uma metodologia de natureza qualitativa vamos propor aos alunos a resolução de um conjunto de tarefas, procurando compreender a forma como usam os conceitos estudados num ambiente similar ao da aula de matemática.

3.2. Estudo de Caso

Segundo Bogdan e Biklen (1994), o estudo de caso é um dos métodos mais frequentes em investigações de índole qualitativa e, segundo Ponte (2006), um estudo de caso é essencialmente um *design* de investigação que pode ter propósitos variados e é caracterizado como incidindo numa entidade bem definida que se procura conhecer, como uma pessoa, uma instituição, um curso, etc. Para Cohen et al. (2007), um estudo de caso é um instante específico que é projetado para descrever um princípio mais generalizado.

Os objetivos do estudo de caso são retratar, analisar e interpretar a singularidade dos indivíduos e situações reais, capturar a complexidade e contextualização do comportamento, contribuir para a ação e intervenção e apresentar e representar a realidade. O foco são indivíduos ou locais, um caso único e situações exclusivas (Cohen, 2007). O plano do estudo de caso pode ser representado como um funil em que a extremidade mais larga representa o início do estudo, altura em que o investigador procura os locais ou pessoas que possam ser objetos de estudo. À medida que melhor conhecem o tema em estudo, os planos são modificados e são selecionadas estratégias (Bogdan e Biklen, 1994). Segundo Ponte (2006), de um modo geral, um estudo de caso começa por ter hipóteses de trabalho preliminares, que vão sendo reformuladas à medida que a investigação avança.

Ponte (2006) apresenta três caraterísticas de um estudo de caso:

- É uma investigação de natureza empírica e baseia-se fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real aproveitando tudo o que for possível recolher através de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações e documentos;

- Não é experimental. Usa-se quando o investigador não pretende modificar a situação, mas sim compreendê-la tal como é. Realiza-se um estudo de caso quando não se tem controlo sobre os acontecimentos e não é possível manipular as potenciais causas do comportamento dos participantes.
- Os resultados de um estudo de caso podem ser dados a conhecer de diversas maneiras como por exemplo textos escritos, comunicações orais ou em vídeo. O relato assume com frequência a forma de uma narrativa cujo objectivo é contar uma história que acrescente algo de significativo ao conhecimento existente.

Cohen et al. (2007) consideram que os estudos de caso têm algumas caraterísticas próprias. Um estudo de caso é não intervencionista e empático e pode recorrer a observação participante e/ou observação não participante. Os dados de um estudo de caso são detalhados e provenientes de diversas fontes, o que leva a que o estudo seja realizado em profundidade e trata os fenómenos de uma forma holística.

Hitchcock e Hughes (1995), referidos por Cohen et al. (2007) sugerem que o estudo de caso é importante quando o investigador tem pouco controlo sobre os acontecimentos. Consideram que um estudo de caso tem como principais características:

- Procura uma descrição rica e vívida de eventos relevantes para o caso;
- Fornece uma narrativa cronológica de eventos relevantes para o caso.
- Mistura uma descrição de acontecimentos com a análise dos mesmos;
- Concentra-se em atores individuais ou grupos de atores, e procura compreender as suas perceções de eventos;
- Destaca acontecimentos específicos que são relevantes para o caso;
- O pesquisador está integralmente envolvido no caso;
- É feita uma tentativa de retratar a riqueza do caso por escrito ou relatório.

Assim, os estudos de caso são projetados para descrever princípios mais generalizados. Os objetivos do estudo de caso são analisar e interpretar a singularidade dos indivíduos ou locais estando o foco nesses mesmos indivíduos ou locais. Nos estudos de caso o investigador pode assumir um papel de observador participante e/ou não participante.

Neste estudo trabalhou-se com um grupo de alunos de uma turma onde a investigadora assumiu os papéis de observador participante e não participante, em diversas situações. Este grupo de alunos (5 alunos) forma um estudo de caso na medida em que se pretende analisar a sua compreensão acerca dos conceitos de lógica estudados, isto é, analisar cada um dos alunos estando o foco na sua compreensão dos conceitos. Neste estudo descrevem-se os diálogos estabelecidos entre a investigadora e os alunos com o objetivo de fazer uma análise dos resultados obtidos.

3.3. Técnicas de Recolha de Dados e Procedimentos

Nesta secção faz-se uma abordagem a algumas técnicas de recolha de dados, entre as quais a entrevista, a observação e a análise documental. Apresentam-se de seguida algumas das principais características destas técnicas para melhor podermos contextualizar o estudo que se pretende desenvolver.

3.3.1. Observação

Segundo Spradley (1980) e Everton e Green (1986), a observação é um acontecimento do dia-a-dia. No entanto, nem todas as observações são tácitas. A observação ocorre mais deliberada e sistematicamente quando esta pretende responder a uma determinada questão (Everton e Green, 1986).

Bailey (1994), referido por Cohen (2007), identifica algumas vantagens na abordagem por observação: os estudos por observação são melhores quando os dados são recolhidos não-verbalmente, o investigador é capaz de discernir sobre o comportamento da pessoa a ser observada, permite tomar anotações e o investigador pode desenvolver relações mais íntimas e informais com quem está a ser observado.

Segundo Spradley (1980), o tipo de observação pode ser diferente entre investigações, consoante o envolvimento do investigador. Segundo o autor, o tipo de participação pode variar entre completo (grau de envolvimento alto), ativo (grau de envolvimento médio alto), moderado (grau de envolvimento médio baixo), passivo (grau de envolvimento baixo) ou não participante, quando não há envolvimento por parte do investigador. As principais características de cada um destes tipos de observação são:

- Observação Participante Completa – O maior nível de envolvimento dos investigadores surge quando estes estudam uma situação da qual já são participantes comuns;
- Observação Participante Ativa – o participante ativo procura fazer o que as outras pessoas fazem para aprender as regras culturais para o comportamento. A participação ativa começa com observações, mas o investigador tenta aprender o comportamento. Embora a participação ativa seja uma técnica extremamente útil, nem todas as situações sociais oferecem a mesma possibilidade desta técnica ser usada;
- Observação Participante Moderada – uma participação moderada ocorre quando o investigador procura manter um equilíbrio entre a participação e a observação;
- Observação Participante Passiva – numa participação passiva o investigador está presente no local da ação, mas não participa ou interage com outras pessoas. O investigador deve ocupar um 'posto de observação' e assumir um papel de espetador;
- Observação Não Participante – é possível fazer uma recolha de dados recorrendo apenas à observação. Isto permite que as investigações possam ser feitas por indivíduos tímidos e, às vezes, uma situação social passível de ser investigada, que não permite qualquer participação.

Gold (1958), referido por Bogdan e Biklen (1994), apresenta três papéis possíveis que um observador pode tomar. Um investigador pode ser um observador completo quando não participa em nenhuma atividade ou pode ser um investigador com envolvimento completo existindo apenas uma pequena diferença entre os seus comportamentos e os dos restantes sujeitos. Os investigadores de campo situam-se entre estes dois extremos, sendo que a sua participação exata varia ao longo do estudo.

No presente estudo a investigadora esteve presente em todas as aulas lecionadas sobre o tema em estudo. Ao longo das várias aulas a mesma foi assumindo diferentes papéis. Um desses papéis assentou na *observação participante moderada* e decorreu durante o ano letivo, na sala de aula. Esta observação teve como fruto a possibilidade de uma caraterização mais pormenorizada de cada um dos alunos envolvidos na investigação. Os aspetos observados/registados foram a motivação, atenção e participação em aula, a realização dos trabalhos de casa e exposição de dúvidas e a presença nos apoios. Em diversas aulas a investigadora assumiu um papel de *observador não participante*, aulas em que a professora da turma expunha a matéria; em aulas de resolução de exercícios a intervenção da investigadora atingiu proporções maiores tendo esta assumido um papel de *observador participante ativo* na medida em que apoiou os alunos na resolução de exercícios e nos esclarecimentos de dúvidas.

3.3.2. Entrevista Semiestruturada

Segundo Yin (2005), a entrevista é uma das fontes de informação mais importantes nos estudos de caso; entrevistar é das formas mais comuns e poderosas de tentar compreender outros seres humanos (Fontana e Frey, 1994). Quanto à estrutura, uma entrevista pode ser não estruturada, semiestruturada ou estruturada (Cohen, 2007).

As entrevistas semiestruturadas têm originado bastante interesse, segundo Flick (2009) que se associa à expectativa de que é mais provável os sujeitos entrevistados expressarem os seus pontos de vista numa situação de entrevista aberta do que numa entrevista standardizada ou num questionário. Comparadas com as entrevistas estruturadas, as entrevistas semiestruturadas não pressupõem uma especificação verbal ou escrita do tipo de perguntas a formular nem, necessariamente, da ordem de formulação (Vázquez e Angulo, 2003). Segundo Flick (2009), a entrevista semiestruturada inclui diferentes tipos de questões e é complementada durante a recolha dos dados. Assim, a entrevista semiestruturada deixa alguma flexibilidade para colocar perguntas no momento mais apropriado, conforme as respostas do entrevistado.

No âmbito da investigação recorre-se a entrevistas semiestruturadas com um carácter de experiências de ensino. É colocado um conjunto de questões, na forma de tarefas matemáticas, que levam os alunos a expressar os seus conhecimentos sobre as temáticas em estudo. Ao mesmo tempo são acompanhados pela investigadora com o objetivo de questionar e clarificar os raciocínios entretanto desenvolvidos. As entrevistas aos alunos foram realizadas em duas sessões. Numa primeira sessão realizaram-se as duas primeiras tarefas (Anexos 1 e 2 respetivamente). Posteriormente realizaram-se as tarefas três e quatro (Anexos 3 e 4, respetivamente). Todas as tarefas envolviam uma apresentação da resposta por escrito, sendo os alunos questionados com o objetivo de clarificar os seus modos de pensamento. Em ambas as entrevistas procedeu-se à gravação áudio, sendo solicitado aos alunos que fossem verbalizando os raciocínios que estavam a desenvolver.

3.3.3. Análise Documental

Segundo Bardin (1997), pode definir-se análise documental como “uma operação ou um conjunto de operações visando representar o conteúdo de um documento sob uma forma diferente da original, a fim de facilitar, num estado ulterior, a sua consulta e referenciação” (p.45). Para Bogdan e Biklen (1994) há dados que se referem aos materiais, em bruto, que os investigadores recolhem. Os dados incluem matérias que os investigadores registam ativamente, tais como transcrições de entrevistas e notas de campo, mas podem também incluir aquilo que outros criaram, tal como diários, fotografias, documentos oficiais ou artigos de jornais.

A análise documental tem como objetivo representar de outra forma condensada a informação por intermédio de transformações que permite fazer uma passagem de um documento inicial para um documento secundário. (Bardin, 1997). Muitas vezes, os investigadores utilizam ficheiros com dados biográficos dos alunos e que contêm informação como relatórios de psicólogos, registos dos testes, frequências de aulas, etc. No entanto, apesar desta utilização, os investigadores assumem uma posição de que estas informações não são muito úteis por não darem uma informação precisa sobre os alunos. Mas, justapor os registos de um aluno com entrevistas a esse mesmo aluno ou com os pais pode ser revelador (Bogdan e Biklen, 1994),

No âmbito desta investigação foi solicitado aos alunos envolvidos que facultassem o teste realizado, tendo do mesmo sido utilizadas algumas questões como tarefas para a situação de entrevista. O objetivo de integrar questões do teste de avaliação na situação de entrevista prendeu-se com o facto de procurar aferir os raciocínios desenvolvidos durante a prova escrita por confronto com o desempenho na situação da entrevista. Da análise da resolução do teste, por parte dos alunos, pretendia-se verificar se essa questão tinha sido realizada no teste. Caso a tivessem resolvido, seria analisado o seu desempenho nessa resolução – quais as etapas ultrapassadas e quais os erros cometidos. Além da resolução do exercício do teste foram também analisadas todas as resoluções das diversas tarefas realizadas pelos alunos durante as entrevistas.

3.3.4. As tarefas

A Tarefa 1 (Anexo 1) é composta por quatro questões que pretendem caraterizar a compreensão dos alunos relativamente aos valores lógicos dos antecedente e consequente de uma implicação, quando apresentada em linguagem natural. Nesta tarefa é dada como verdadeira uma implicação e, nas quatro questões apresentadas, afirma-se ou nega-se o antecedente (ou consequente) e questiona-se o aluno sobre o valor lógico do consequente (ou antecedente). O objetivo desta tarefa é analisar se os alunos compreendem o que se pode concluir sobre o valor lógico do antecedente (ou consequente) de uma implicação quando é negado o seu consequente (ou afirmado o seu antecedente) e que nada se pode concluir sobre o consequente (ou antecedente) de uma implicação quando se nega o seu antecedente (ou afirma o seu consequente).

Na Tarefa 2 (Anexo 2) são apresentadas três proposições simples em linguagem natural. A tarefa é composta por três questões:

- Na primeira questão, é apresentada uma proposição composta, também em linguagem natural, e quatro proposições escritas em linguagem simbólica, com o objetivo de identificar qual das quatro proposições será a tradução para linguagem simbólica da proposição inicialmente apresentada;
- Na segunda questão é pedido aos alunos que apresentem uma justificação para que cada uma das restantes opções que não represente a tradução pedida;
- Na terceira questão é solicitado aos alunos que traduzam para linguagem natural cada uma das proposições que rejeitaram na questão 1.

O objetivo desta tarefa é analisar como é que os alunos trabalham as proposições lógicas nas linguagens natural e simbólica. Pretende-se ainda analisar a capacidade de tradução entre as duas representações procurando caracterizar a familiaridade dos alunos com os conceitos lógicos e com a sua interpretação.

Na Tarefa 3 (Anexo 3) são apresentadas duas afirmações, em linguagem natural, envolvendo a soma e o produto de números inteiros. Ambas as afirmações são traduzidas por uma implicação, e pretende-se saber se cada uma das afirmações que é feita é verdadeira ou falsa.

Esta tarefa tinha um duplo objetivo. Por um lado, fazer a tradução para a linguagem simbólica de cada uma das afirmações apresentadas em linguagem natural e, por outro, discutir a veracidade de cada uma delas. No primeiro caso, pretendia-se analisar se os alunos eram capazes de encontrar um contraexemplo que justificasse o facto de a implicação não ver verdadeira. No segundo caso pretendia-se analisar se os alunos tinham compreendido que não basta um caso para verificar a veracidade da implicação. Consoante o desempenho dos alunos poderia ser pedido que realizassem uma demonstração, para analisar a sua capacidade de apresentar uma demonstração cuidada, baseada na manipulação da linguagem simbólica.

Na Tarefa 4a (Anexo 4) era pedido aos alunos que fizessem uma demonstração de uma equivalência de proposições apresentada em linguagem simbólica. Pretendia-se aferir da sua capacidade de simplificação de expressões lógicas, seguindo as regras das prioridades das operações, bem como sobre a sua destreza na manipulação e compreensão da simbologia utilizada. Em alternativa à demostração completa, nomeadamente em caso de dificuldades com a simplificação da equivalência dada, os alunos teriam a oportunidade de fazer a mesma demonstração de forma faseada (Tarefa 4b – Anexo 5), isto é, eram pedidas demonstrações que exigiam apenas um ou dois passos e que, na sua totalidade, permitiriam demonstrar a equivalência da Tarefa 4a. Em último caso, seria apresentada a demonstração completa (Tarefa 4c – Anexo 6) e ser-lhes-ia solicitado que explicassem cada um dos passos apresentados.

3.3.5. Contexto de Ensino

A turma sobre a qual incidiu este estudo era composta por 25 alunos, que se distribuíam entre 21 rapazes e 4 raparigas. As aulas eram compostas por dois blocos de 50 minutos com uma periodicidade de 3 vezes por semana. As aulas assumiram um caráter predominantemente expositivo sendo os alunos solicitados a participar pontualmente, quer lendo definições de alguns conceitos apresentados no manual, quer realizando a resolução de alguns exercícios no quadro.

Além das aulas obrigatórias no horário, os alunos dispunham de aulas de apoio, uma vez por semana (com duração variável). O objetivo destas aulas era esclarecer dúvidas e proporcionar aos alunos um espaço onde tivessem a possibilidade de realizar exercícios e estudar.

3.3.6. Critérios de Escolha dos Alunos

Tendo em conta que o estudo procura compreender em profundidade a forma como os alunos compreendem os conceitos de lógica simbólica procurou-se selecionar um grupo de alunos da turma que fosse representativo desta. Neste sentido foi explicado aos alunos da turma no que consistia o projeto questionando-os sobre se estariam interessados em participar. Neste processo houve dez alunos que se voluntariaram para colaborar. Após uma análise cuidada da participação e desempenho destes alunos nas atividades letivas, por observação das aulas e pelos resultados das avaliações realizadas, considerou-se que todos eles poderiam fazer parte do estudo de caso. Numa fase posterior foi solicitado aos alunos que obtivessem a autorização dos Encarregados de Educação para a participação no estudo. Neste processo só oito apresentaram as autorizações respetivas, ficando assim restringido o grupo de alunos intervenientes no estudo de caso.

Desses oito alunos foram selecionados cinco com base nas notas do primeiro e segundo período. As notas obtidas pelos alunos nesses períodos podem ser analisadas na tabela 8:

Tabela 8 – Classificações obtidas pelos alunos no 1º e 2º períodos

	1º Período	2º Período
Benedita	17	17
Martim	18	19
Matilde	6	7
Salvador	9	7
Santiago	11	11

A seleção destes alunos permite uma amostra variada (relativamente às classificações), sendo composta por alunos com classificações altas, médias e baixas e, inclusive, alunos que subiram, que desceram e que mantiveram as classificações entre os dois períodos.

4. Análise dos Dados

No presente capítulo procede-se caraterização dos alunos e, de seguida, à análise dos dados recolhidos na situação de entrevista e de avaliação sumativa contextualizando-os sempre que possível com a observação realizada no decorrer da implementação do processo de ensino. Apresentam-se, no último subtópico, as conclusões resultantes da análise dos dados.

4.1. Benedita

Apresenta-se uma breve caraterização da Benedita e, tendo em conta os objetivos das tarefas referidos no capítulo 3, proceder-se-á à análise do seu desempenho na realização das tarefas propostas.

4.1.1. Caraterização da Benedita

A Benedita tem 15 anos e nunca registou retenções durante o seu percurso escolar. Durante o presente ano letivo o seu desempenho foi muito bom, tendo obtido na avaliação sumativa a classificação de 17 valores em todos os períodos. No final do ensino básico terminou o 9ºano com nota 5 tendo obtido nota 4 no Exame Nacional.

A aluna não revelou dificuldades à disciplina mas foi pouco participativa. Durante praticamente todo o ano ocupou um lugar na última fila partilhando a sua mesa com o mesmo colega.

Dada a facilidade que a Benedita mostrou domínio dos conceitos nunca frequentou as aulas de apoio disponibilizadas pela escola nesta disciplina. Relativamente à realização dos trabalhos de casa o seu desempenho foi bastante satisfatório, embora tenha diminuído ao longo do ano letivo.

4.1.2. Tarefa 1 (Anexo 1)

4.1.2.1. Questão 1

Logo que teve acesso à primeira tarefa, a reação da Benedita, após ler o enunciado da primeira questão foi "Isto nem é preciso pensar". A investigadora leu a questão com a aluna.

Inv. – A Maria passou de ano. Recebeu uma prenda?

Benedita – Sim!

Inv. – Porquê?

Benedita – Porque se ela passasse de ano recebia uma prenda. E se ela passou de ano, recebeu uma prenda.

A aluna não apresenta dificuldades em passar para o papel a justificação que acabou de apresentar.

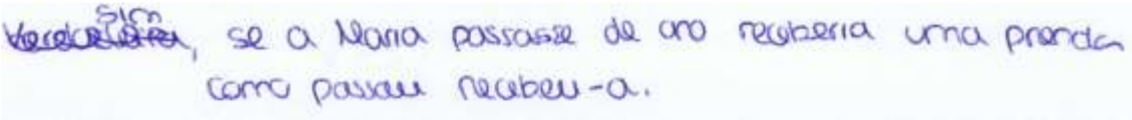

Sim
~~Verdadeira~~, se a Maria passasse de ano receberia uma prenda
como passou recebeu-a.

Figura 9 – Resposta da Benedita à questão 1

Na sua resposta a Benedita evidencia a implicação que é apresentada na proposição inicial o que contribui para a facilidade na apresentação da justificação da sua resposta. Ainda assim ela não apela à representação simbólica, parecendo apresentar um bom domínio na utilização da linguagem natural.

4.1.2.2. Questão 2

A primeira resposta que a Benedita dá a esta questão é que a Maria passou de ano, mas rapidamente corrige a sua resposta e diz que a Maria não passou de ano. Quando questionada sobre o porquê de a Maria não ter passado de ano, a aluna apresenta, oralmente, uma justificação correta e cuidada.

Benedita – Porque se… A única maneira da proposição ser falsa é se ela não tiver… Não! Se ela tiver passado de ano e não tiver recebido a prenda e como a proposição é verdadeira e ela não recebeu a prenda, significa que ela passou de ano à mesma… Não passou de ano!

Na escrita da sua resposta, a aluna tenta evitar a escrita em linguagem simbólica, considerando ser mais fácil justificar "em português". No entanto, tem algumas dificuldades com a redação da justificação. A aluna acaba por escrever a resposta com uma mistura da linguagem natural com a linguagem simbólica.

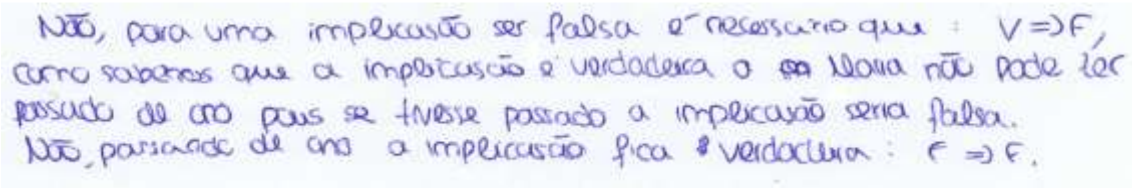

Não, para uma implicação ser falsa é necessário que: $V \Rightarrow F$,
como sabemos que a implicação é verdadeira a Maria não pode ter
passado de ano pois se tivesse passado a implicação seria falsa.
Não passando de ano a implicação fica verdadeira: $F \Rightarrow F$.

Figura 10 – Resposta da Benedita à questão 2

Nesta questão o facto de a aluna não recorrer à tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica pareceu dificultar a concretização da justificação. No entanto, a aluna tende a incluir linguagem simbólica na sua resposta. A utilização simultânea de ambas as representações parece ajudar a estruturar o raciocínio lógico da aluna. O domínio da linguagem natural que ela aparenta mostrar na questão 1 revela-se menos eficaz quando as premissas da implicação não seguem a ordem do antecedente para o consequente.

4.1.2.3. Questão 3

Depois de ler o enunciado da questão a aluna pergunta à investigadora se pode escrever em linguagem matemática. A aluna começa por escrever $\sim (passar\ de\ ano)$ (figura 11). No entanto, rapidamente conclui que não precisa de escrever.

> Benedita – Se ela não passar de ano, ou seja, a primeira é falsa, ou seja, a seguir tanto pode ser verdadeira como falsa.

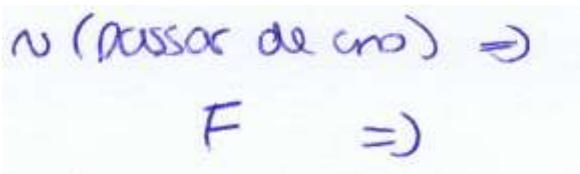

$\sim$ (passar de ano) $\Rightarrow$
$F \quad \Rightarrow$

Figura 11 – Representação feita pela Benedita que acompanha a frase dita

A investigadora pede à aluna que escreva em linguagem simbólica e esta fá-lo com facilidade. Define p e q facilmente. De seguida escreve $\sim p \Rightarrow q$ e a investigadora questiona-a se, o facto de não passar de ano ($\sim p$), implica que tenha recebido uma prenda (q). A aluna risca o q e segue o seu raciocínio (figura 12):

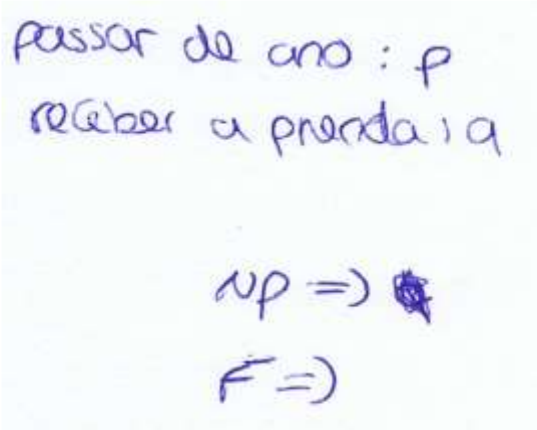


Figura 12 – Representação, em linguagem simbólica, feita pela Benedita

Benedita – Sabemos que isto aqui é falso… [referindo-se a *não* p]

Inv. – É falso porquê?

Benedita – Então… Porque diz aqui que ela não passou de ano.

Inv. – Então, se a Maria não passou de ano, …

Benedita – A primeira é falsa, esta aqui… [referindo-se a "Se a Maria passar de ano da proposição inicial]

Inv. – Tu estás a pensar bem, mas estás a escrever mal… O passar de ano é p…

Benedita – Sim…

Inv. – Ela não passou de ano. *Não* p é o quê? …

Benedita – É o contrário de p.

Inv. – Sim, mas tu estás a dizer que *não* p é falso. Então estás a dizer que a Maria não passar de ano é falso. É isso?

Benedita – Não…

A investigadora sugere à aluna que sistematize, em linguagem simbólica, a informação que tem.

Inv. – Se a Maria passar recebe uma prenda. Como é que escreves isso em linguagem simbólica?

Benedita – p implica q.

Inv. – E o que é que sabes mais?

Benedita – Ela não passou de ano, ou seja, *não* p implica q.

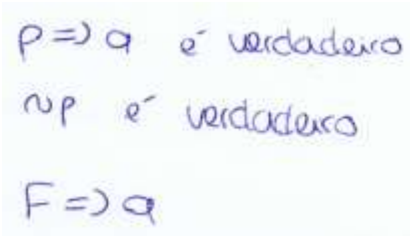
Inv. – Porquê?

Benedita – Porque é o contrário. Se eu tinha posto que o p era ela passar de ano, se ela não passou de ano, não p.

Inv. – Certo. Mas nós sabemos que se a Maria passar de ano recebe uma prenda e que ela não passou de ano. Estas duas proposições são o quê?

Benedita – Verdadeiras...

A aluna escreve, sem dificuldade em linguagem simbólica o que acabou de dizer. Quando a investigadora a questiona sobre o facto de a Maria ter recebido ou não uma prenda, ela analisa o que escreveu e conclui que se $não\, p$ é verdadeiro então p é falso e portanto tem $falso$ implica q (na proposição inicial) e conclui que pode ter recebido ou não (figura 13):


$p \Rightarrow q$ é verdadeiro

$\sim p$ é verdadeiro

$F \Rightarrow q$

Figura 13 – Representação, em linguagem simbólica da questão 3, feita pela Benedita

Benedita – Pode ter recebido e pode não ter recebido!

Inv. – Porquê?

Benedita – Porque a implicação só é falsa se for $verdadeiro$ implica $falso$.

Inv. – Exato…

A aluna fica surpreendida com o facto de não ter uma resposta concreta para a questão. Quando tem de escrever a resposta no papel, a aluna apresenta-a de uma forma cuidada e não revela dificuldades.

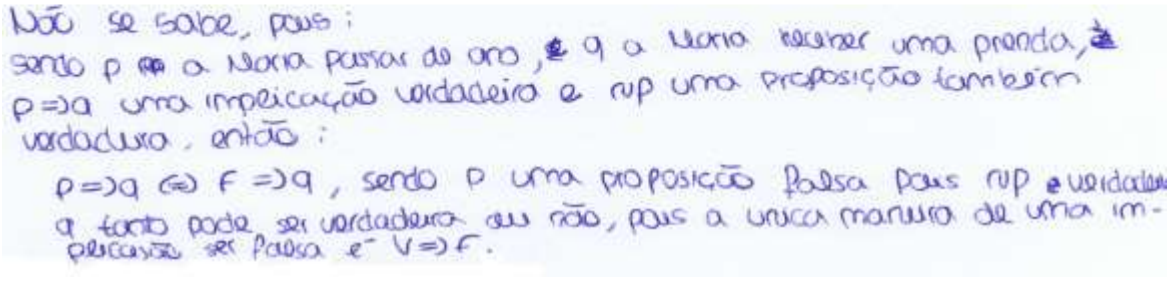

Não se sabe, pois:
sendo p a Maria passar de ano, e q a Maria receber uma prenda,
$p \Rightarrow q$ uma implicação verdadeira e $\sim p$ uma proposição também verdadeira, então:
$p \Rightarrow q \Leftrightarrow F \Rightarrow q$, sendo p uma proposição falsa pois $\sim p$ é verdadeira q tanto pode ser verdadeira ou não, pois a única maneira de uma implicação ser falsa é $V \Rightarrow F$.

Figura 14 – Resposta da Benedita à questão 3

O facto de a Benedita recorrer à linguagem simbólica aquando da realização da sistematização do seu raciocínio facilitou a concretização da justificação. Mais uma vez ela faz uma utilização simultânea de ambas as representações o que parece ajudar a estruturar o seu raciocínio lógico. Ainda assim mostra alguma surpresa por não ter uma resposta concreta para a questão apresentada.

4.1.2.4. Questão 4

A resposta da aluna a esta questão foi imediata, tendo respondido logo que não se sabe se a Maria passou de ano ou não.

Benedita – Não se sabe!

Inv. – Porquê?

Benedita – Pela mesma razão de há bocado.

A investigadora pede à aluna que escreva a sua resposta e a justificação. Ela revela algumas dificuldades dizendo "eu não sei escrever assim em português! Eu gosto mais quando é contas". No entanto, por analogia à resposta que deu na questão anterior, acabou por escrever a resposta seguinte (figura 15):

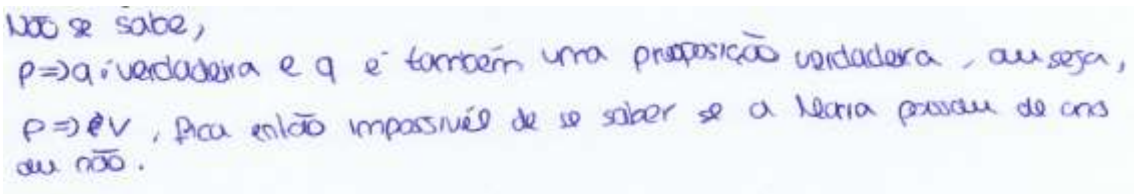

Não se sabe, $p \Rightarrow q$ é verdadeira e q é também uma proposição verdadeira, ou seja, $p \Rightarrow q$ V, fica então impossível de se saber se a Maria passou de ano ou não.

Figura 15 – Resposta da Benedita à questão 4

O facto de ter recorrido à linguagem simbólica na questão 3 pareceu facilitar a interpretação e a conclusão na questão 4. Volta a utilizar simultaneamente as duas representações o que aparenta ajudar a estruturar o seu raciocínio lógico e simplificar a concretização da justificação. Embora tenha estabelecido uma analogia com a questão anterior, revela maior dificuldade em concretizar o raciocínio através da linguagem natural.

4.1.3. Tarefa 2 (Anexo 2)

Para responder à primeira questão, a aluna optou por traduzir a proposição dada para linguagem simbólica e, posteriormente, comparar com as diversas opções que são dadas. Não apresentou quaisquer dúvidas na tradução e rapidamente escolheu a opção correta.

A investigadora pede à aluna que responda à questão 2, justificando a rejeição das outras opções. Como a aluna optou pela tradução da proposição em linguagem natural para linguagem simbólica, a sua resposta foi “porque eu fiz assim [apontando para a sua tradução], e deu assim”. No entanto foi-lhe pedido que analisasse cada uma das outras opções e arranjasse uma justificação para que essas não fossem as opções corretas.

A Benedita analisou cada uma das opções. Refere que rejeitaria a opção A por ter q ao invés de $\sim q$; justifica a rejeição de C com o facto de a implicação estar “ao contrário” e na opção D identifica o facto de ter uma disjunção em vez de uma conjunção (figura 16). Como anteriormente a aluna já tinha referido a possibilidade de relacionar a implicação com a disjunção (e consequentemente surgirem negações), a investigadora confrontou-a com esse facto e questionou-a, então, se não poderia ser a opção A. A Benedita justificou, corretamente, que a negação teria de estar em r e não em p.

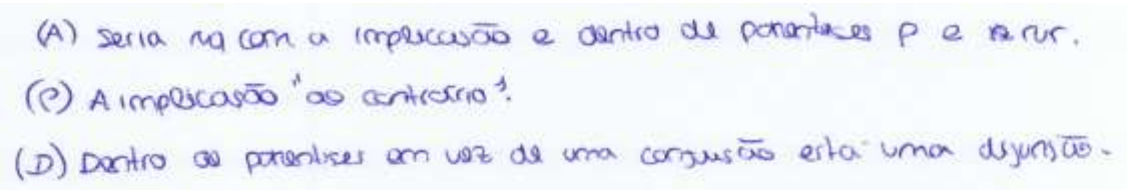

(A) seria ~q com a implicasão e dentro de parenteses p e ~r.
(C) A implicasão "ao contrario".
(D) Dentro de parenteses em vez de uma conjusão esta uma disjunsão.

Figura 16 – Justificações apresentadas pela Benedita na questão 2

Quando foi pedido para traduzir cada uma das opções rejeitadas para linguagem natural, a Benedita fá-lo sem apresentar dificuldades e traduz a opção A sem a verbalizar. Na opção C começa por escrever “A Maria gosta de gomas ou de chocolate” mas quando se depara com o símbolo de implicação corrige para “Se a Maria …” (figura 17). Depois de completar a resposta da opção C, não apresenta a mesma dificuldade na opção D, escrevendo logo o “se” (figura 17).

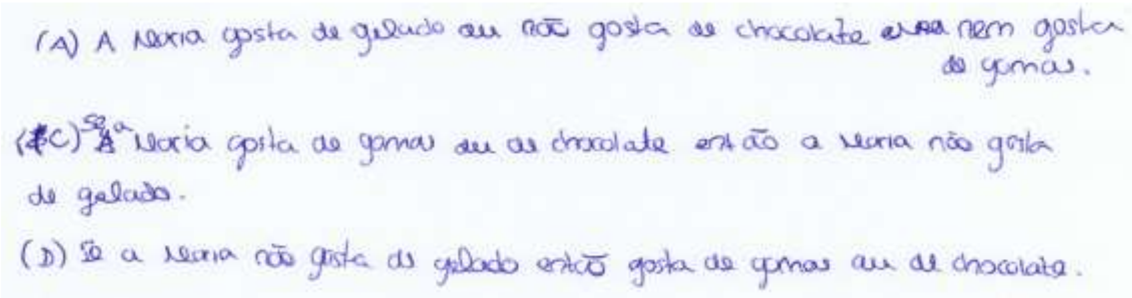

(A) A Maria gosta de gelado ou não gosta de chocolate nem gosta de gomas.
(C) Se a Maria gosta de gomas ou de chocolate então a Maria não gosta de gelado.
(D) Se a Maria não gosta de gelado então gosta de gomas ou de chocolate.

Figura 17 – Traduções para linguagem natural realizadas pela Benedita

Na realização desta tarefa, a Benedita aparenta não ter dificuldades na tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica, como se pôde verificar na realização da questão 1 e também consegue fazer a tradução da linguagem simbólica para a natural, como atesta o desempenho na realização da questão 3. Na tradução para a linguagem natural a implicação ainda causa alguma dificuldade inicial, mas que é rapidamente ultrapassada.

4.1.4. Tarefa 3 (Anexo 3)

Após a leitura das questões apresentadas na tarefa a Benedita considera que a primeira afirmação é falsa mas apresenta alguma dificuldade em justificar a sua afirmação.

> Benedita – O que o Pedro disse é falso porque a soma de dois números inteiros é par… Não… Sim, a soma de dois números inteiros… Pode ser ou não pode ser verdadeira…

Depois de reler a afirmação de novo, ela volta a responder que esta é falsa e, então, já apresenta uma justificação coerente:

> Inv. – O Pedro diz que ‘Se a soma de dois números inteiros é par, então o seu produto é ímpar.’. Isto é verdade ou não?
>
> Benedita – Não.
>
> Inv. – Porquê?
>
> Benedita – Porque se os dois números inteiros forem pares a soma continua a ser par e o produto continua a ser par.

A aluna não apresenta dificuldades em escrever a sua resposta. Escreve-a com clareza e não precisa de recorrer a um contraexemplo concreto, generalizando para o caso dos números pares.


Não, porque se os dois números inteiros forem pares então a sua soma é par e o produto também.

Figura 18 – Resposta da Benedita à questão 1 da tarefa 3

Relativamente à segunda afirmação, a aluna rapidamente conclui que esta é verdadeira mas apresenta alguma dificuldade em justificar essa conclusão quando a investigadora lhe pergunta o porquê de achar que é verdadeira.

Benedita – Porque sejam os dois números pares ou ímpares… Quando a soma… quando o produto deles dá ímpar…

Inv. – Então, estás a dizer quando são os dois pares ou os dois ímpares… Se multiplicares dois pares dá ímpar?

Benedita – Não, é par. Ou seja é falso, afinal.

Mais uma vez, depois de a investigadora reler a afirmação, a aluna apresenta uma justificação correta para a sua conclusão.

Inv. – Dois números inteiros. O produto é ímpar. Então a soma desses mesmos dois número é par. É verdade ou não?

Benedita – É verdade porque o produto só é ímpar se os dois números inteiros forem ímpares, ou seja a soma de dois números ímpares é par.

A justificação é reproduzida no papel pela aluna sem quaisquer dificuldades:

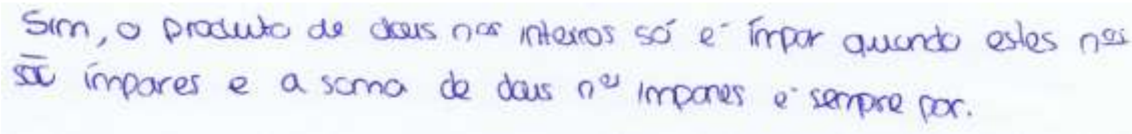

Sim, o produto de dois nºs inteiros só é ímpar quando estes nºs são ímpares e a soma de dois nºs ímpares é sempre par.

Figura 19 – Resposta da Benedita à questão 2 da tarefa 3

Dadas as caraterísticas da aluna, a investigadora perguntou-lhe se seria capaz de fazer uma demonstração, dado ter dito que a afirmação era verdadeira. A aluna mostra-se reticente, mas mostra ser capaz de apresentar um raciocínio coerente com ajuda a investigadora.

Inv. – Tu dizes que o produto de dois números inteiros só é ímpar quando estes números são ímpares. Então, o produto de dois números inteiros ser ímpar, quer dizer o quê? Esses dois números são a e b. Então $a\ vezes\ b$ é o quê?

Benedita – Ímpar.

Inv. – Em linguagem matemática…

(…)

Inv. – Como é que escreves os números pares?

Benedita – 2n

Inv – Então e os ímpares?

Benedita – 2n+1.

Posto isto, a aluna conclui que ab se pode escrever na forma $2n + 1$ e, a partir daqui e acompanhado da leitura da resposta que escreveu, facilmente escreve a e b na mesma notação. A investigadora questiona qual o objetivo da demonstração e a aluna reconhece, facilmente, que quer provar que a soma de a e b é par e continua a esquematizar a sua resposta, já sem apoio por parte da investigadora:

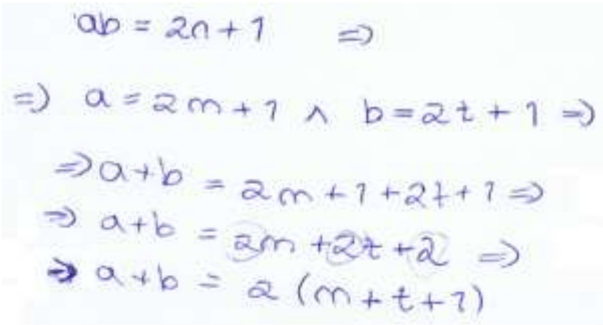


Figura 20 – Raciocínio apresentado pela Benedita

Após a escrita de a e de b na forma de número ímpar a Benedita induziu que a soma dos dois números seria ímpar e admitiu que o seu produto também seria ímpar. A partir daqui conseguiu mostrar que a soma dos dois números é um número par, realizando esta tarefa com alguma facilidade.

É de salientar que a Benedita conseguiu dar uma resposta satisfatória a ambas as questões baseando-se apenas na linguagem oral e nas propriedades das operações com inteiros. A concretização dessa linguagem na forma escrita ou simbólica foi uma tarefa menos conseguida onde por vezes foi necessário a intervenção da investigadora.

4.1.5. Tarefa 4 (Anexo 4a)

Depois de ler o enunciado da tarefa 4, a Benedita refere que primeiro tem de simplificar o que está "entre parêntesis".

> Benedita – Negar a primeira ou a segunda. [referindo-se à passagem da implicação para uma disjunção]
>
> Inv. – Negamos a segunda também?
>
> Benedita – Não, mantemos a segunda.

A aluna apresenta um desempenho razoável na manipulação simbólica. Inicialmente transforma a segunda implicação numa disjunção realizando em simultâneo a negação do antecedente. Quando faz essa negação não coloca a o sinal de negação em b, mas corrige depois de ser chamada à atenção (figura 21):

$$[a \Rightarrow (\sim a \vee b) \Rightarrow \sim a)] \wedge b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [a \Rightarrow ((a \wedge \sim b) \vee \sim a)] \wedge b \Leftrightarrow$$

Figura 21 – Passos 1 e 2 da demonstração da Benedita

De seguida aplica a propriedade distributiva sem quaisquer dificuldades na manipulação simbólica. A aluna reconhece que $\sim a \vee a$ é $verdadeiro$ mas não consegue enunciar qual é a propriedade envolvida.

$$\Leftrightarrow [a \Rightarrow ((\sim a \vee a) \wedge (\sim a \vee \sim b))] \wedge b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [a \Rightarrow V \wedge (\sim a \vee \sim b)] \wedge b \Leftrightarrow$$

Figura 22 – Passos 3 e 4 da demonstração da Benedita

Nesta fase a aluna não simplifica a conjunção, optando por transformar numa disjunção a implicação que restava. Fá-lo sem qualquer dificuldade, apresentando a seguinte expressão simbólica:

$$\Leftrightarrow [\sim a \vee (V \wedge (\sim a \vee \sim b))] \wedge b \Leftrightarrow$$

Figura 23 – Passo 5 da demonstração da Benedita

A aluna volta a não simplificar a conjunção, aplica a propriedade distributiva e só posteriormente faz as simplificações:

$$\Leftrightarrow [\sim a \vee ((V \wedge \sim a) \vee (V \wedge \sim b))] \wedge b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [\sim a \vee (\sim a \vee \sim b)] \wedge b \Leftrightarrow$$

Figura 24 – Passos 6 e 7 da demonstração da Benedita

Quando chega a esta fase a investigadora intervém questionando a aluna se não poderia ter feito esta simplificação anteriormente. Ela reconhece essa possibilidade, mas não considera que tenha feito muita diferença na sua resolução, uma vez que chegou à mesma conclusão.

Nesta fase a Benedita pretende "trocar os parêntesis" pois reconhece que tem duas disjunções e que pode simplificar os dois $não\ a$ por apenas $não\ a$. No entanto diz que tem de aplicar a propriedade comutativa ao invés da propriedade associativa. A aluna não se lembra do nome da propriedade, embora saiba aplicá-la. Depois verifica que tem de aplicar a propriedade distributiva e fá-lo sem quaisquer dificuldades:

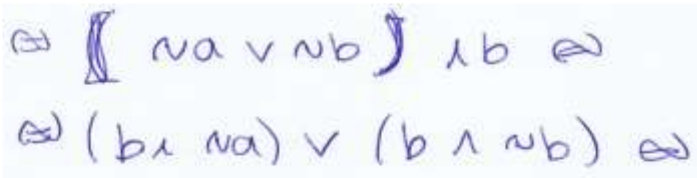


Figura 25 – Passos 8 e 9 da demonstração da Benedita

A aluna, apontando para $b \wedge\sim b$, sabe que é $falso$ mas não se recorda do princípio que está envolvido.

Benedita – Este aqui foi o que eu disse há bocado e agora não me lembro.

Inv. – É um princípio…

Benedita – Eu não acredito! Eu disse há bocado e agora não me lembro!

Inv. – Pode estar a chover e a não chover ao mesmo tempo?

Benedita – Eu sei qual é. Eu não me lembro é do nome!

Inv. – Se eu disser está a chover mas não está a chover eu estou-me a…

Benedita – Princípio da Não Contradição!

Quando obtém o valor lógico falso na disjunção a aluna diz logo "elemento neutro" e aplica a propriedade comutativa para concluir a sua demonstração:

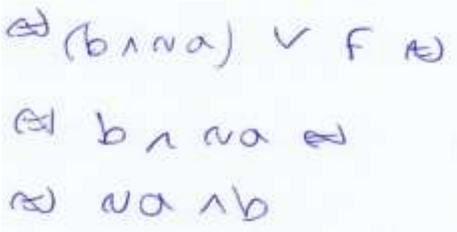


Figura 26 – Passos 10, 11 e 12 da demonstração da Benedita

Na demonstração realizada no teste, a aluna não revela muitas dificuldades tendo estruturado a sua demostração com cuidado, mas a aluna revela algumas dificuldades em identificar corretamente as propriedades que aplica. Do terceiro para o quarto passo a aluna perde um sinal de negação o que condiciona a sua demonstração. No entanto, no final da demonstração acaba por 'perder' um ∨ *b* que vem colmatar o primeiro erro que cometeu e chega ao resultado que pretende.

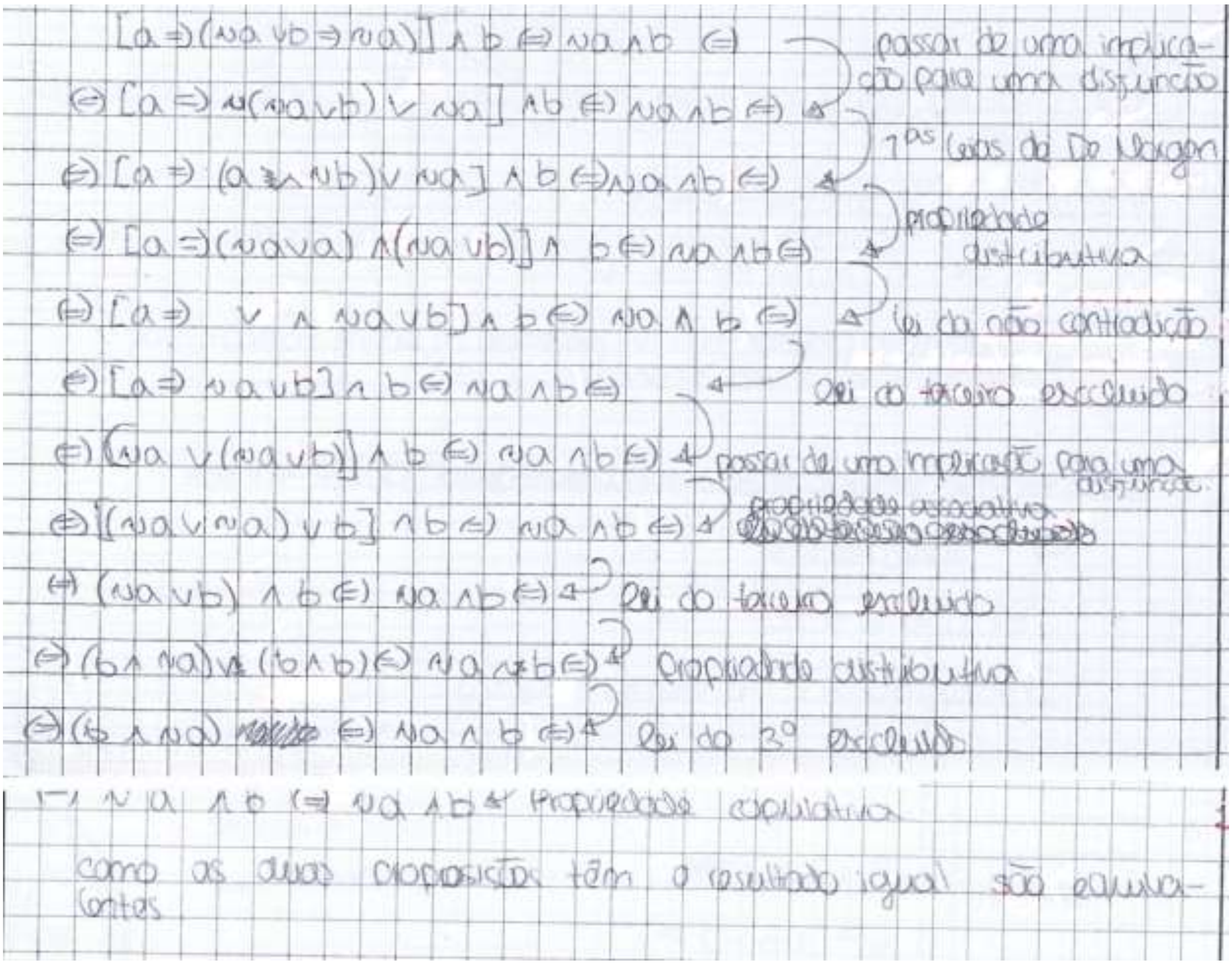


Figura 27 – Demonstração realizada pela Benedita no teste de avaliação

A Benedita mostra assim que consegue aplicar as propriedades da lógica que lhe permitem simplificar expressões que envolvem várias operações em simultâneo. Embora o desempenho na manipulação simbólica seja bom nem sempre consegue identificar as propriedades que aplica, ainda que as mesmas sejam aplicadas de forma correta. As operações e propriedades da lógica parecem assim estar reificadas. As várias operações lógicas são trabalhadas de forma proceptual, sendo possível identificar vários proceitos baseados nas propriedades das operações lógicas.

4.2. Martim

Apresenta-se uma breve caraterização do Martim e, tendo em conta os objetivos das tarefas referidos no capítulo 3, proceder-se-á à análise do seu desempenho na realização das tarefas propostas.

4.2.1. Caraterização do Martim

O Martim tem 16 anos e nunca registou retenções. Durante o presente ano letivo apresentou um excelente desempenho obtendo a classificação de 18 valores no primeiro período, 19 no segundo e terminou o ano com a nota máxima, 20 valores. Já no ensino básico manifestou um desempenho similar, terminando o 9º ano com nota máxima de 5, quer na avaliação interna, quer no Exame Nacional.

O aluno não revelou dificuldades à disciplina e durante as aulas foi participativo, revelou-se bastante atento e não se distraiu com os colegas. Ao longo de todo o ano ocupou um lugar na segunda fila e teve sempre o mesmo colega ao seu lado, salvo raras exceções.

Dado o seu desempenho na disciplina, o Martim nunca frequentou as aulas de apoio disponibilizadas pela escola. A realização dos trabalhos de casa foi bastante satisfatória, tendo aumentado com o decorrer do ano letivo. Diversas vezes o aluno manifestou o seu desagrado com a realização do trabalho de casa por este ser composto por exercícios que ele considerava serem muito repetitivos.

4.2.2. Tarefa 1 (Anexo 1)

4.2.2.1. Questão 1

Na primeira situação, o aluno não manifesta dificuldade em compreender o raciocínio proposto e acaba por responder que sim, que a Maria passou de ano apresentando uma justificação correta, figura 28.

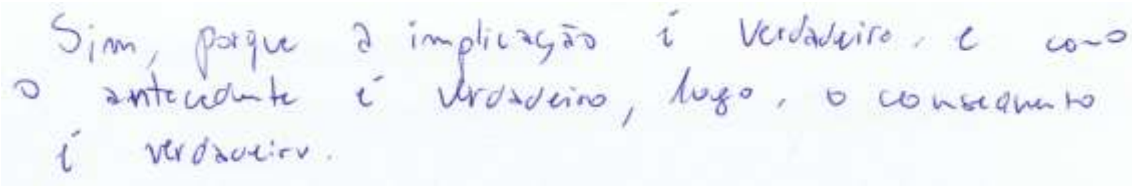

Sim, porque a implicação é verdadeiro, e como o antecedente é verdadeiro, logo, o consequento é verdadeiro.

Figura 28 – Resposta do Martim à questão 1

O Martim não manifesta qualquer dificuldade em interpretar o raciocínio que lhe é apresentado, dominando com alguma destreza a linguagem natural e identificando com facilidade que a proposição apresentada representa uma implicação, para a qual consegue estabelecer o valor lógico.

4.2.2.2. Questão 2

Na segunda questão, o aluno lê o enunciado em voz alta e pergunta à investigadora se pode fazer uma tabela de verdade. Tendo obtido a concordância da investigadora ele converte para linguagem simbólica a proposição inicial e preenche corretamente a tabela de verdade da implicação (figura 29):

Figura 29 – Tabela de Verdade da implicação, apresentada pelo Martim

Depois de construir a tabela de verdade da implicação o aluno pensa em voz alta e pergunta retoricamente:

> Martim - Então, como é que é? Sabe-se que a Maria não recebeu uma prenda, então é falso… *q* é falso… Passou de ano? Não sabemos se passou de ano porque o consequente ser falso, … não conseguimos concluir se a proposição é verdadeira ou falsa.

Nesta situação, a resposta do aluno prende-se com o facto de considerar a possibilidade de a implicação ser falsa. A investigadora elucida-o dizendo: “isto [referindo-se à implicação] é sempre verdade, para todas as situações”. Perante esta informação o Martim reformula o seu raciocínio e conclui que a Maria não passou de ano.

O aluno reproduz por escrito uma justificação semelhante à apresentada na questão 1. Note-se que quando ele escreve antecedente pela primeira vez verbaliza corretamente “consequente” (figura 30), e completa o raciocínio considerando que o antecedente é falso:

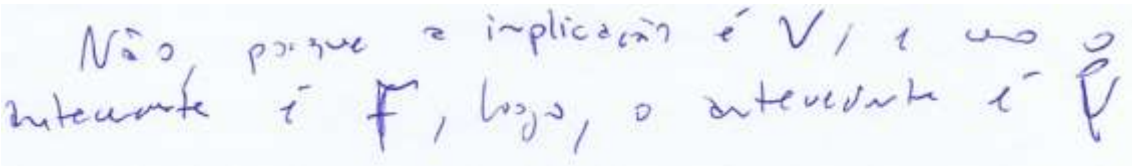


Figura 30 – Resposta do Martim à questão 2

Nesta situação o Martim faz corretamente a tradução da linguagem natural para a simbólica. O aluno recorre à tabela de verdade, mas por considerar a possibilidade de a afirmação inicial ser falsa, o Martim não concluiu corretamente qual o valor lógico da proposição dada. O Martim revela alguma destreza na realização dos procedimentos e processos, o que lhe permite uma compreensão relacional.

4.2.2.3. Questão 3

Na terceira situação o Martim lê o enunciado ao mesmo tempo que vai analisando a tabela de verdade que construiu anteriormente e vai expressando o seu pensamento em voz alta:

> Martim - Sabe-se que a Maria não passou de ano… Não passou de ano, falso… A implicação sendo verdadeira… Portanto, a Maria recebeu uma prenda? Pode ter recebido ou não ter. Não é possível…

A tabela de verdade construída anteriormente continua a servir de suporte para o estabelecimento das conclusões que o Martim vai tirando, acabando por escrever como conclusão o texto que se reproduz na figura 31:

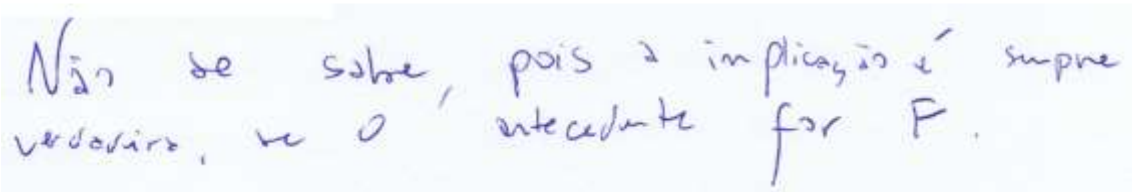

Não se sabe, pois a implicação é sempre verdadeira, se o antecedente for F.

Figura 31 – Resposta do Martim à questão 3

O Martim apresenta um excelente desempenho na tradução da linguagem natural para a simbólica e a tabela de verdade revelou-se um procedimento eficaz para os raciocínios que desenvolve, ao contrário do que se verifica na questão anterior.

4.2.2.4. Questão 4

Na última questão o Martim usa o mesmo tipo de raciocínio que desenvolveu na questão anterior. Recorre à tabela de verdade e conclui que:

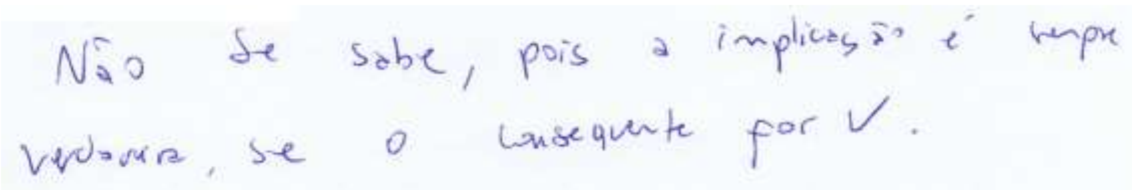

Não se sabe, pois a implicação é sempre verdadeira, se o consequente for V.

Figura 32 – Resposta do Martim à questão 4

A partir da observação da tabela de verdade o Martim consegue identificar facilmente o antecedente e o consequente fazendo uma leitura correta das diferentes hipóteses e conclui o seu raciocínio de forma adequada. O facto de ter recorrido à representação tabular permite-lhe fazer uma tradução entre ambas as representações (linguagem natural e simbólica) desenvolvendo raciocínios coerentes em qualquer uma das representações.

4.2.3. Tarefa 2 (Anexo 2)

Para responder à primeira questão que é colocada na tarefa 2, o Martim começa por traduzir a proposição dada para linguagem matemática sem analisar cada uma das opções, e diz “gosta de gomas é $não\ r$ [escreve $\sim r$], gosta de chocolate é p [escreve p] e não gosta de gelado é $não\ q$ [escreve $\sim q$]”. Depois relê a proposição inicial e completa a sua tradução com as operações lógicas (figura 33):

Figura 33 – Tradução para linguagem simbólica apresentada pelo Martim

Depois de fazer a tradução da proposição para linguagem simbólica, o Martim analisa as opções de resposta que lhe eram facultadas e responde rapidamente que a opção correta é a opção B.

Apesar do aluno ter feito a tradução simbólica para responder à primeira questão, a investigadora pede ao aluno que apresente uma justificação para rejeitar cada uma das restantes opções, como era solicitado na questão 2.

> Martim - Esta, a última, porque tem um ou (∨) e aqui é um e (∧). Esta aqui [referindo-se à opção C] porque está ao contrário (…) e esta aqui [referindo-se à opção A] a frase é uma implicação e aqui é um ou… Ah, podia ser…(…)

O aluno consegue apresentar justificações para não escolher qualquer das outras proposições para traduzir a proposição dada. Refere que a opção D contém uma disjunção no consequente, onde deveria ter uma conjunção; elimina a opção C por ter o antecedente e o consequente por ordem inversa e elimina a opção A por esta não apresentar a implicação que está subjacente na proposição apresentada em linguagem natural. Antes que lhe fosse questionada a relação entre a implicação e a disjunção o Martim lembra-se rapidamente dessa relação. Sem qualquer intervenção da investigadora ele opta por transformar a sua implicação numa disjunção e comparar com a opção A. Após a comparação justifica corretamente que a negação teria de estar em r ao invés de estar em p.Note-se que o Martim justifica corretamente a rejeição da opção A mas quando a concretiza no papel escreve $\sim p$ em vez de vez de $\sim q$.

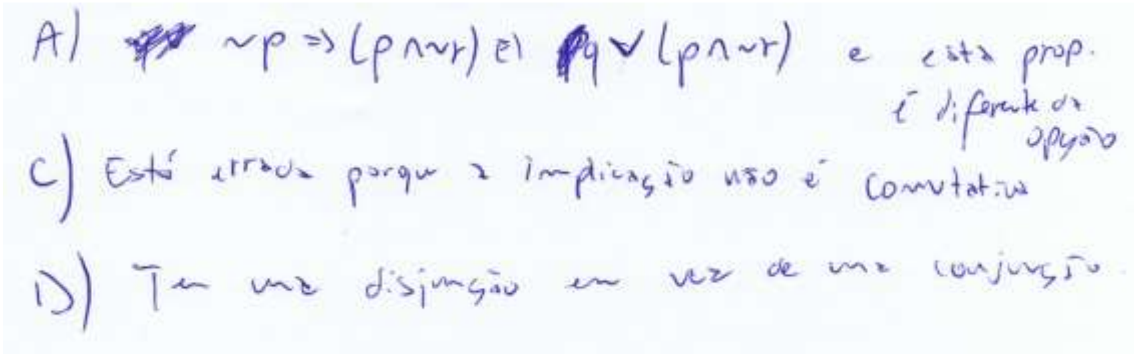
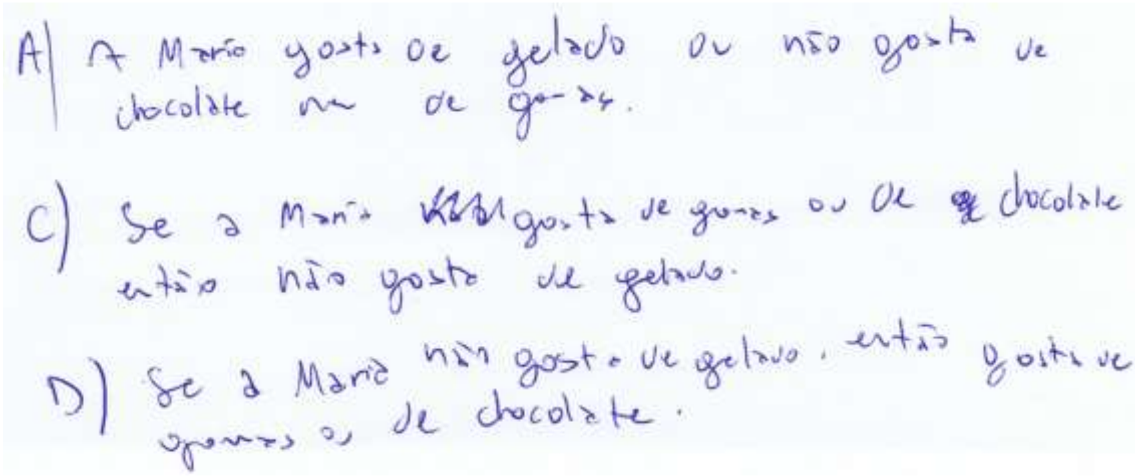

A) $\sim p \Rightarrow (p \wedge \sim r)$ e $q \vee (p \wedge \sim r)$ e esta prop. é diferente da opção
C) Está errada porque a implicação não é comutativa
D) Tem uma disjunção em vez de uma conjunção.

Figura 34 – Justificações apresentadas pelo Martim para a resposta à questão 2

O Martim consegue fazer a tradução entre as duas linguagens com facilidade e é capaz de identificar os operadores com precisão. É com base nestes que decide os seus raciocínios. O Martim é capaz de lidar com as propriedades usando-as com destreza na manipulação das expressões simbólicas.

Para responder à terceira questão o Martim opta por traduzir oralmente cada uma das frases e só depois escrever a resposta.

O Martim traduz corretamente a opção A. Apresenta alguma indecisão relativamente a ser “gosta de gomas” ou “não gosta de gomas” mas analisa a proposição p e conclui que é a segunda opção. Não apresenta dificuldades em associar a conjunção a um “e”. Na sua resposta o Martim tem o cuidado de a elaborar de modo a não repetir a expressão “não gosta” optando por escrever “nem”. Na opção C, primeiro lê “A Maria gosta de gomas” mas imediatamente corrige para “Se a Maria gosta de gomas” quando se depara com o símbolo de implicação. A opção D é traduzida corretamente e sem dificuldades, sem cometer o mesmo erro que cometeu na opção C. Mais uma vez, o Martim escreve a sua justificação evitando repetir a palavra ‘gosta’.



A) A Maria gosta de gelado ou não gosta de chocolate nem de gomas.

C) Se a Maria gosta de gomas ou de chocolate então não gosta de gelado.

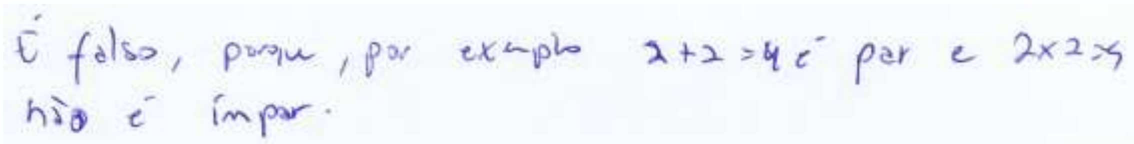
D) Se a Maria não gosta de gelado, então gosta de gomas ou de chocolate.

Figura 35 – Traduções para linguagem natural apresentadas pelo Martim

O Martim revela-se capaz de efetuar as traduções da linguagem simbólica para a linguagem natural sem apresentar dificuldades.

4.2.4. Tarefa 3 (Anexo 3)

A resposta do Martim sobre a veracidade da afirmação do Pedro é imediata. Ele diz logo que "não necessariamente" e apresenta um contraexemplo que escreve na sua folha de respostas (figura 36). O Martim não tem dúvidas de que um caso basta para provar que a afirmação é falsa.



É falso, porque, por exemplo 2+2=4 é par e 2x2=4 não é ímpar.

Figura 36 – Resposta à questão 1 da tarefa 3, apresentada pelo Martim

Também na segunda questão, sobre a veracidade da afirmação do António, o Martim apresenta a sua resposta quase de imediato. Ele não procura um caso que verifique a veracidade da afirmação. Pelo contrário, realiza logo o raciocínio que apresenta como justificação:

> Martim - Então, só é ímpar [o produto] se os dois números forem ímpares. Se forem os dois pares dá par e se for um ímpar com um par dá par também. Só se forem os dois… Exatamente. É isso. Então os dois números têm de ser ímpares. A soma de dois números ímpares é par, exatamente.

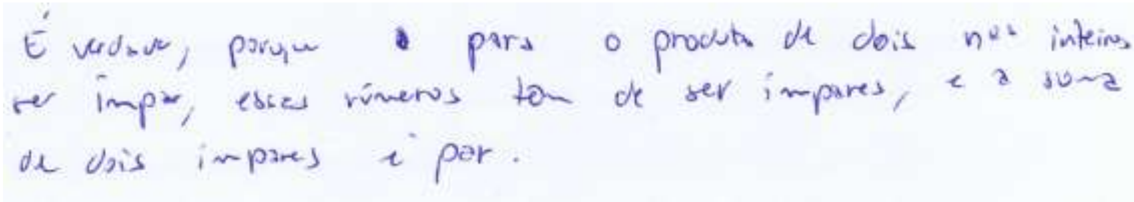

É verdade, porque para o produto de dois nºs inteiros ser ímpar, esses números tem de ser ímpares, e a soma de dois ímpares é par.

Figura 37 – Resposta apresentada pelo Martim para questão 1 da tarefa 3

O Martim demonstra bastante à-vontade para lidar com cada uma das proposições e consegue desenvolver um raciocínio demonstrativo sem precisar de o traduzir simbolicamente na sua folha de respostas. O seu domínio mental sobre as operações aritméticas parece ser determinante para as respostas que produz. Consegue ainda reproduzir o seu raciocínio em linguagem natural com alguma facilidade.

Dadas as caraterísticas do Martim neste tipo de raciocínios, a investigadora procurou que ele operacionalizasse o seu raciocínio através de uma demonstração e a sua reação foi "Tem de ser com aquela coisa do $2n$!? $2n+1$, porque são ímpares". Inicialmente o Martim revela algumas dificuldades na representação simbólica das premissas (figura 38):

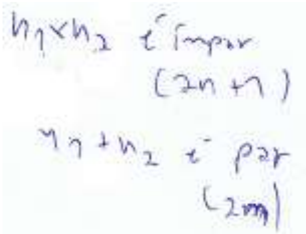

$n_1 \times n_2$ é ímpar
$(2n+1)$
$n_1 + n_2$ é par
$(2m)$

Figura 38 – Primeira esboço do Martim para iniciar a sua demonstração

Depois da representação anterior o Martim diz que "tenho de provar que se o produto é ímpar implica os dois números ser ímpares e isso implica a soma ser par" e escreve, esquematicamente o que acabou de dizer (figura 39):

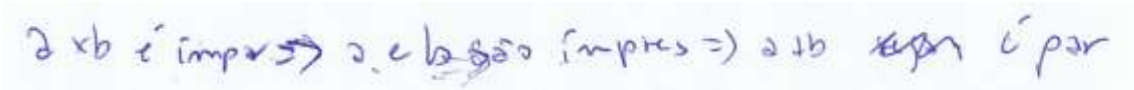

$a \times b$ é ímpar $\Rightarrow$ a e b são ímpares $\Rightarrow$ $a+b$ é par

Figura 39 – Esquema da demonstração do Martim

Quando questionado pela investigadora se o que acabou de escrever é uma demonstração, o aluno responde que não mas manifesta algumas dúvidas:

> Martim - quer dizer, é uma demonstração… Quase… Não é bem demonstração…

Depois do Martim reconhecer que o que apresentou não é uma demonstração, é-lhe pedido pela investigadora que tente apresentar uma demonstração mais cuidada. O Martim apresenta o seguinte raciocínio (figura 40):

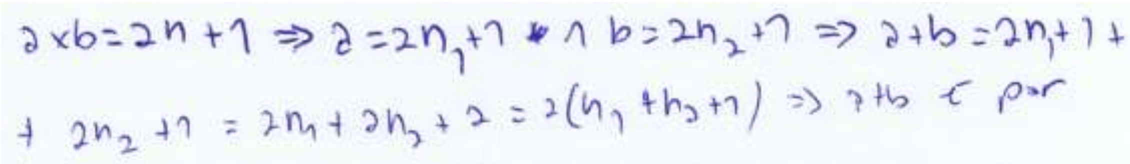


Figura 40 – Raciocínio apresentado pelo Martim

O aluno não apresentou quaisquer dificuldades durante a realização desta tarefa e revela ter compreendido que basta encontrar um contraexemplo para justificar que uma afirmação é falsa e é capaz de apresentar um raciocínio cuidado da veracidade da segunda afirmação apresentada. O Martim apresenta uma compreensão relacional tendo reificado os conceitos.

4.2.5. Tarefa 4 (Anexo 4a)

Quando o Martim é colocado perante a tarefa 4, lê o enunciado e o seu primeiro comentário é “tenho de pegar nesta [apontando para o primeiro membro da equivalência] e chegar àquela [apontando para o segundo membro da equivalência]”.

> Martim - Tenho de começar aqui por dentro [referindo-se à segunda implicação]. Passar esta implicação a um ‘e’. Não, a um ‘ou’. Exato, a um ‘ou’.

O Martim escreve ‘$a \Longrightarrow$’, embora o sinal de implicação seja confundido com o de igual e depois pergunta à investigadora “como é que era? Não antecedente ou consequente ou é não… qual é que é o não?”. A investigadora retribui-lhe a questão e o aluno opta por fazer uma tabela de verdade. Começa por preencher as colunas de a, b e de $a \Longrightarrow b$ e, como pensa que a proposição é equivalente a $\sim a \vee b$, acrescenta a coluna à esquerda com os valores lógicos de $\sim a$ e, finalmente, preenche a última coluna. Compara os valores lógicos o confirma a equivalência (figura 41):

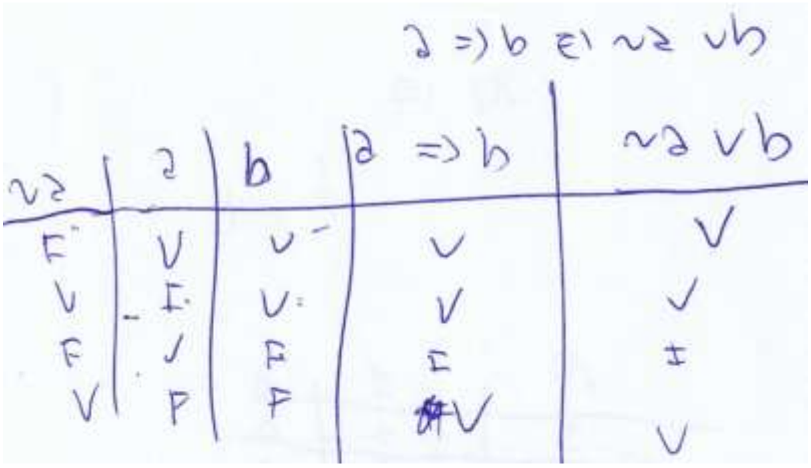


Figura 41 – Tabela de verdade feita pelo Martim para verificar a equivalência

Depois de confirmar a transformação de uma implicação numa disjunção, de um modo processual, o Martim escreve corretamente a transformação pretendida e, no passo seguinte, aplica corretamente e sem dificuldades a Lei de DeMorgan (figura 42):

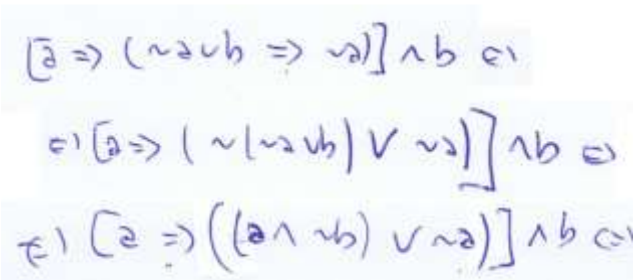


Figura 42 – Passos 1, 2 e 3 da demonstração apresentada pelo Martim

O Martim transforma, novamente, a implicação numa disjunção, como se mostra na figura 42:

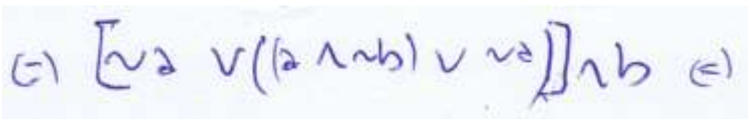


Figura 43 – Passo 4 da demonstração do Martim

Nesta fase o aluno refere que vai aplicar a propriedade distributiva. No entanto, a investigadora pede-lhe que analise o que escreveu e questiona-o sobre os parêntesis que tem na representação. Inicialmente o aluno considera-os todos necessários e começa a analisar cada um:

Martim – O parêntesis reto é preciso. Este aqui também, por causa daquele 'não a'. É 'não a' ou este 'bocado todo'.

Inv. – E dentro desse 'bocado todo' tens o quê?

Martim – Tenho aqui um 'ou', mas também é preciso porque aqui está um 'e'. Também preciso deste aqui.

Inv. – E estes de fora? Precisas?

Martim – Não! Porque são tudo 'ous'.

(…)

Martim – Então, 'não a ou não a'... Como é que era? Vou fazer uma tabela de verdades.

A partir da análise da tabela de verdade (Figura 45), o Martim conclui que $\sim a \vee \sim a$ é equivalente a $\sim a$ e simplifica a expressão e verifica que tem de efetuar a propriedade distributiva. O aluno reconhece que se aplicasse a propriedade distributiva antes da simplificação, iria tornar a demonstração mais demorada:

Inv. – O que é que ia acontecer se fizesses a distributiva?

Martim – Ia arranjar aqui uma grande confusão…

Inv. – Ias lá chegar …

Martim – Eventualmente, ou enganar-me, provavelmente. Isto é preciso tomar decisões certas.

O aluno analisa a expressão que obteve com cuidado e conclui que apenas pode aplicar a propriedade distributiva e aplica-a corretamente e sem dificuldades.

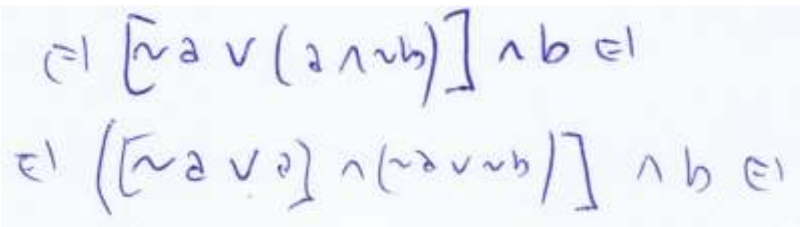


Figura 44 – Passos 5 e 6 da demonstração do Martim

Quando se depara com $\sim a \vee a$ o aluno não tem a certeza de como simplificar e diz " 'Não a' ou a dava… a…". Na dúvida, e mais uma vez, recorre à tabela de verdade. Acrescenta uma coluna à tabela que tinha feito anteriormente (figura 45):

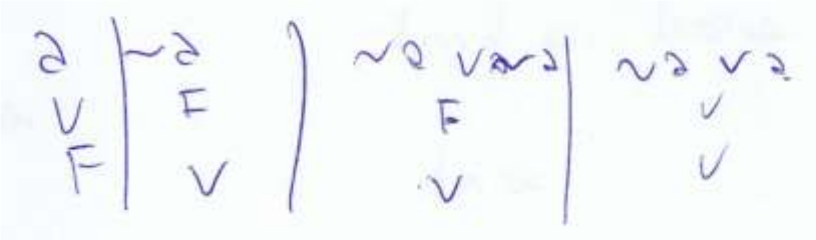


Figura 45 – Tabela de verdade feita pelo Martim

Depois de concluir que é sempre verdade o Martim simplifica a expressão e diz "verdadeiro e qualquer coisa, dá qualquer coisa" (figura 46):

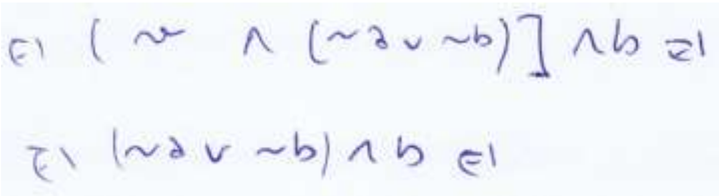


Figura 46 – Passos 7 e 8 da demonstração do Martim

O aluno reconhece a necessidade dos parêntesis na última expressão da figura 46, por estarem envolvidas operações diferentes e constata que tem de aplicar a propriedade distributiva novamente. Aplica-a corretamente e reconhece que $\sim b \wedge b$ é sempre falso (figura 47):

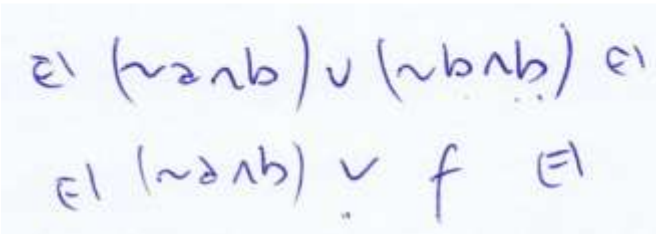


Figura 47 – Passos 9 e 10 da demonstração do Martim

Nesta fase o Martim considera que "qualquer coisa ou falso, dá qualquer coisa" e rapidamente conclui que dá $\sim a \wedge b$, conforme queria provar (figura 48):

Figura 48 – Passo 11 da demonstração do Martim

Na demonstração realizada aquando da realização do teste de avaliação (figura 49), o Martim apresenta uma resolução bastante cuidada e com rigor, sendo referidas corretamente todas as propriedades que utilizou. Apesar de todo o cuidado e rigor, no final da demonstração o Martim escreve que $\sim b \wedge b$ é verdadeiro (mas identifica bem como o Princípio da Não Contradição) e, no passo seguinte considera $(b \wedge \sim a) \vee v \Leftrightarrow b \wedge \sim a$, justificando-o com o facto de ter uma disjunção com uma proposição verdadeira. Pode considerar-se que o Martim apresenta um domínio das propriedades e procedimentos a aplicar para a realização de uma demonstração desta natureza. Na situação de entrevista estas propriedades parecem não estar completamente consolidadas, mas o Martim consegue recorrer aos procedimentos e processos que lhe estão subjacentes, ultrapassando assim as dificuldades que a situação de aprendizagem lhe coloca. O Martim denota assim que várias das propriedades são encaradas como proceitos, usando a linguagem de Tall, ou estão reificados segundo a teoria da reificação de Sfard.

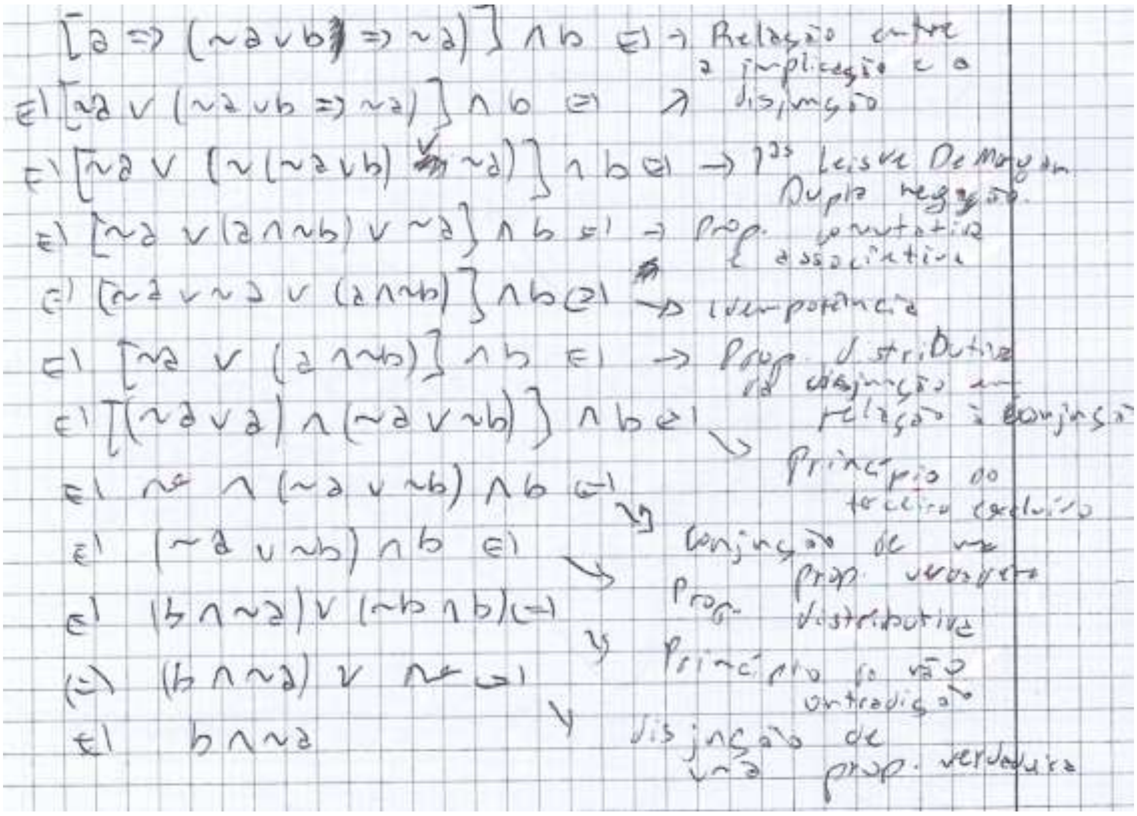


Figura 49 – Demonstração realizada pelo Martim no teste de avaliação

4.3. Matilde

Apresenta-se uma breve caraterização da Matilde e, tendo em conta os objetivos das tarefas referidos no capítulo 3, proceder-se-á à análise do seu desempenho na realização das tarefas propostas.

4.3.1. Caraterização da Matilde

A Matilde tem 16 anos. O seu desempenho durante o presente ano letivo revelou-se fraco mas a aluna progrediu tendo obtido a classificação de 6 valores no primeiro período e 7 valores no segundo. Terminou o ano com a classificação final de 8 valores à disciplina. Não registou retenções no seu percurso académico. Terminou o 9º ano com classificação de 3, sendo que no Exame Nacional obteve 2.

A Matilde revelou ser uma aluna empenhada, embora tenha revelado algumas dificuldades na disciplina, podendo algumas delas ser justificadas pela falta de confiança no seu desempenho académico. Durante todo o ano a aluna ocupou lugares na primeira fila partilhando a sua mesa com outros colegas.

Relativamente ao seu empenho na disciplina, a aluna frequentou a grande maioria das aulas de apoio que eram disponibilizadas pela escola. Durante o primeiro período ela revelou algumas dificuldades em apresentar todos os trabalhos extra aula que foram solicitados. Na restante parte do ano letivo mostrou um maior empenho e realizou as tarefas solicitadas com maior frequência.

4.3.2. Tarefa 1 (Anexo 1)

4.3.2.1. Questão 1

Na primeira situação, a Matilde não manifesta qualquer dificuldade em responder que sim, que a Maria passou de ano apresentando uma justificação correta:

Inv. – Sabemos que a Maria passou de ano. Recebeu uma prenda ou não?

Matilde – Recebeu.

Inv. – Recebeu? E porquê?

Matilde – Porque supostamente se ela passasse de ano, recebia uma prenda.

Quando lhe é solicitado para registar a sua resposta, a Matilde apresenta algumas dificuldades questionando a investigadora se “posso justificar, porque a proposição…” e completa a resposta (figura 50) sem questionar novamente a investigadora:

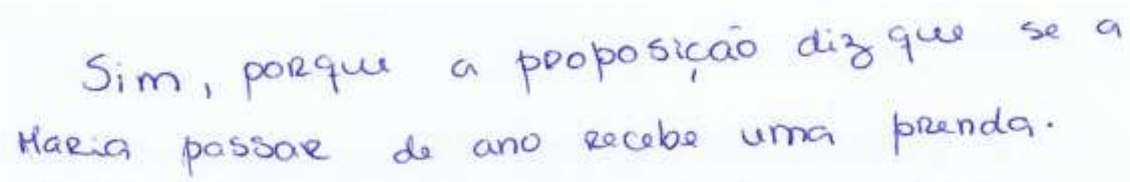

Sim, porque a proposição diz que se a Maria passar de ano recebe uma prenda.

Figura 50 – Resposta da Matilde à questão 1 da tarefa 2

A Matilde não manifesta qualquer dificuldade em interpretar a questão que lhe é apresentada nem em responder à mesma. Não recorre à linguagem simbólica nem se questiona sobre os valores lógicos das proposições envolvidas, respondendo com base no domínio da linguagem natural.

4.3.2.2. Questão 2

Na segunda situação a Matilde também responde corretamente e sem dificuldades, no entanto não justifica corretamente:

Inv. – A Maria não recebeu uma prenda. Ela passou de ano ou não?

Matilde – Não.

Inv. – Não? Porquê?

Matilde – Porque ela só recebia a prenda se passasse de ano.

Aparentemente, a aluna compreendeu a questão e responde corretamente. No entanto, quando solicitada uma justificação, o recurso à linguagem natural traz-lhe algumas dificuldades. O raciocínio que a aluna faz parece estar correto mas a justificação apresentada não esclarece completamente a forma como está a pensar em termos de manipulação do valor lógico da proposição envolvida.

Dada a resposta da Matilde, a investigadora questiona-a para saber se a Maria só recebia a prenda se passasse de ano. A aluna revela alguma dificuldade em interpretar a questão da investigadora e muda a sua resposta, dizendo que “pode ter passado ou não”, mas rapidamente retorna à sua resposta inicial, de que a Maria não passou de ano e procura justificar referindo, tal como fez na questão 1, que “a proposição diz que se a Maria passar de ano recebe uma prenda”. A investigadora sugere à aluna que recorra a linguagem simbólica para encontrar uma justificação para a sua resposta.

A aluna não apresenta quaisquer dificuldades em definir as proposições p e q. Quando a investigadora pede que traduza a implicação para linguagem simbólica, inicialmente, a Matilde traduz para $p \wedge q$ mas posteriormente corrige (figura 51):

> Inv – Então, traduz lá isto [$p \wedge q$] para linguagem natural.
>
> Matilde – A Maria passa de ano e recebe uma prenda.
>
> Inv. – Isso é o mesmo que dizer que se a Maria passar de ano recebe uma prenda?
>
> Matilde – Não! Tem de ser um ‘implica’.

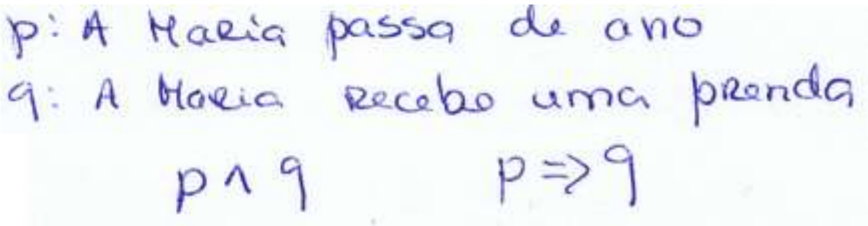


Figura 51 – Representação das proposições feita pela Matilde

A investigadora questiona a Matilde sobre o valor lógico da implicação. A aluna sabe que apenas é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso, mas recorre a uma tabela de verdade, não apresentando quaisquer dificuldades na sua construção (figura 52).

Figura 52 – Tabela de verdade da implicação feita pela Matilde

A investigadora volta a questionar a Matilde o que podemos dizer sobre a Maria ter ou não passado de ano, sabendo que a implicação é verdadeira. A aluna responde corretamente, embora com algumas hesitações, mas confunde o antecedente com o consequente. Quando verbaliza ‘antecedente’, a aluna está a referir-se à proposição q:

Matilde – Então stôra, se o antecedente for falso… Ela pode ter recebido uma prenda ou não. Ah… Não… Se o antecedente for falso ela pode ter recebido uma prenda ou não. Ou seja, se ela não recebeu a prenda, o antecedente é falso. Ela não passou de ano.

A aluna continua a apresentar dificuldades na justificação e apenas é capaz de justificar quando bastante encaminhada pela investigadora:

Inv. – Tu dizes que se ela passou de ano, recebeu uma prenda. Certo?

Matilde – Sim…

Inv. – Então… Ela não recebeu uma prenda. Ela passou de ano ou não?

Matilde – Não.

Inv. – Porquê?

Matilde – Porque ela só recebia a prenda se passasse de ano.

Inv. – Ou seja, se ela não recebeu uma prenda…

Matilde – Não passou de ano.

Inv. – Porque se tivesse passado de ano…

Matilde – Recebia uma prenda.

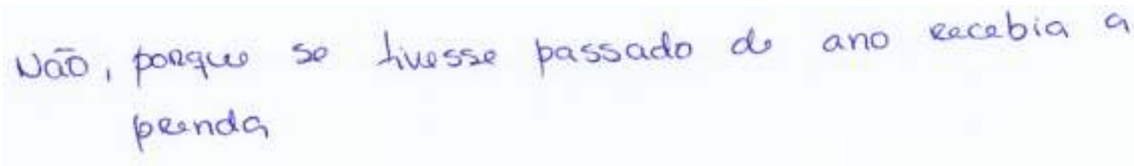

Não, porque se tivesse passado de ano recebia a prenda

Figura 53 – Resposta da Matilde à questão 2 da tarefa 2

Aparentemente, a aluna consegue responder à questão de forma correta, mas não consegue operacionalizar uma justificação plausível. Mesmo perante a tradução simbólica da questão e depois de simular os possíveis valores lógicos para a implicação inicial, não conseguiu identificar aí uma forma de fundamentar a sua resposta. A aluna apenas é capaz de apresentar a justificação correta depois de um encaminhamento significativo pela investigadora. A Matilde diz que "só recebia a prenda se passasse de ano", pois, aparentemente, não está a considerar o facto de a Maria poder receber a prenda sem ter passado de ano. Parece haver alguma discrepância entre a linguagem natural e a linguagem simbólica, não sendo clara a sua integração para justificar uma resposta concreta. Ainda assim a Matilde revela algum domínio na tradução entre a linguagem natural e simbólica.

4.3.2.3. Questão 3

Depois de ler a terceira questão, a Matilde considera que terá de "dar sempre a mesma justificação".

Inv. – O que é que diz a implicação inicial?

Matilde – Que se a Maria passar de ano, recebe uma prenda.

Inv. – Mas a Maria não passou…

Matilde – Então stôra, não recebe a prenda.

Inv. – Não?

Matilde – Então, stôra… Se a Maria passar de ano recebe a prenda. Mas ela não passou.

Inv. – E então?

Matilde – Ah… Mas como é uma implicação…

Inv. – Pensa alto! Mesmo que esteja mal…

Matilde – Como é implicação, acho que independentemente do consequente ser verdadeiro ou falso… Então se o meu antecedente for falso, o meu consequente pode ser, tem de ser verdadeiro. Pode ser verdadeiro.

Aparentemente, a aluna continua a privilegiar a linguagem natural e destaca uma das possíveis respostas à questão colocada. No entanto a investigadora intervém, reforçando de novo o raciocínio pretendido:

Inv. – E pode ser falso?

Matilde – Não.

Inv. – Porquê?

Matilde – Está difícil stôra…

Inv. – Nós sabemos que se a Maria passar de ano recebe uma prenda.

Matilde – Sim.

Inv. – A Maria não passou de ano. Recebeu a prenda ou não?

Matilde – Não.

Nesta fase a investigadora pede à Matilde que traduza a proposição 'A Maria não passou de ano' para linguagem simbólica e a aluna faz a tradução corretamente para $não\ p$. Quando questionada sobre o valor lógico desta proposição a aluna não tem dificuldades em responder que é verdadeira, isto é, que $não\ p$ é verdadeiro:

Inv. – p $implica$ q é verdadeiro. Mas agora temos o quê? Estamos a dizer que a Maria não passou de ano.

Matilde – Ou seja, $não$ p. [escreve que $não$ p é $verdadeiro$]

Inv. – E em que é que essa informação nos ajuda para saber se a Maria recebeu ou não uma prenda?

Matilde – Porque é uma implicação. Independentemente do antecedente… Não…

Inv. – Se $não$ p é verdadeiro, então o que é que sabemos sobre p?

Matilde – É falso. [escreve que p é $falso$]

Inv. – Que informação é que temos mais?

Matilde – Que a Maria recebe uma prenda se passar de ano… p $implica$ q.

Com esta informação escrita (figura 54), a investigadora questiona a Matilde sobre o que é que esta pretende saber, da implicação ($p \Longrightarrow q$), quando lhe pergunta se a Maria passou ou não de ano, ao que a Matilde responde que precisa de determinar o valor lógico de q:

Inv. – Nós sabemos que a Maria não passou de ano e sabemos que se passar de ano recebe uma prenda. Então sabemos que p é falso e que p $implica$ q é verdadeiro. Quando eu pergunto se a a Maria recebeu uma prenda, estou-te a perguntar o quê?

Matilde – Se o q é verdadeiro ou falso.

Depois de analisar a tabela de verdade feita na questão anterior a aluna tira a conclusão corretamente (figura 54).

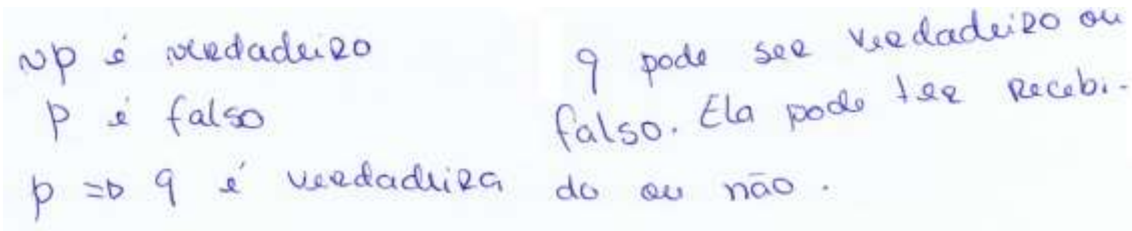
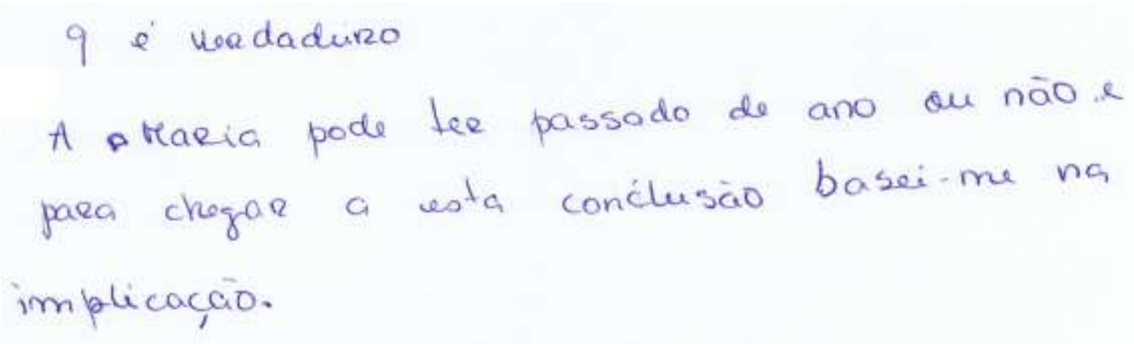


Figura 54 – Resposta da Matilde à questão 3 da tarefa 2

A tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica revelou-se, neste caso, uma mais-valia para a compreensão da questão apresentada. A aluna não domina a validade da proposição quando esta é apresenta na linguagem natural mas apresenta algum domínio na sua representação simbólica. Como já referido anteriormente a coordenação entre as duas representações é um processo que a Matilde ainda não conseguiu integrar no seu raciocínio, revelando assim uma abordagem instrumental na compreensão dos conceitos em estudo.

4.3.2.4. Questão 4

Na quarta situação, a aluna faz um raciocínio análogo ao da questão 3 e não apresenta dificuldades em responder e justificar a sua resposta. Recorre novamente à tabela de verdade analisando as linhas em que q é verdadeiro e justifica dizendo que se baseou na tabela de verdade da implicação:


q é verdadeiro

A ~~a~~ Maria pode ter passado de ano ou não e para chegar a esta conclusão baseei-me na implicação.

Figura 55 – Resposta da Matilde à questão 4 da tarefa 2

Por saber que q é verdadeiro, a Matilde imediatamente recorre à tabela de verdade e identifica o valor lógico que o antecedente pode tomar. Por analogia com o que aconteceu na questão anterior, a aluna melhora o seu desempenho na análise da proposição quando esta é apresentada na sua representação simbólica, respondendo com base nesta e acabando por se afastar do raciocínio baseado na linguagem natural.

4.3.3. Tarefa 2 (Anexo 2)

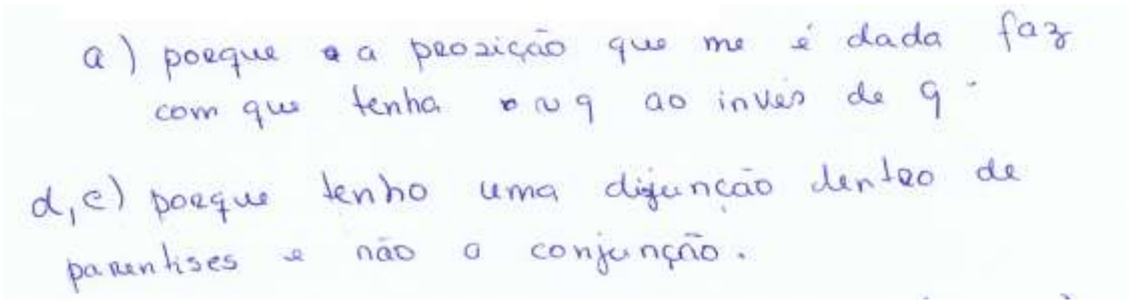
Quando é apresentada a primeira questão da tarefa 2, baseada na escolha múltipla, a Matilde não apresenta dificuldades em responder. Analisa cada uma das opções e conclui dizendo que a opção correta é a B. A investigadora questiona-a no sentido de que ela justifique a sua resposta:

Matilde – Acho que é a B.

Inv. – Porquê?

> Matilde – Então stôra, a proposição diz que ela não gosta de gelado, ou seja vamos ter o $não\, q$ e vai implicar, e então ela gosta de gomas e de gelados… chocolate. Stôra, eu não consigo explicar…

A Matilde revela alguma dificuldade em manejar toda a informação que é disponibilizada na proposição, nomeadamente na sua tradução simbólica a partir da linguagem natural, pelo que a investigadora opta por solicitar-lhe que justifique porque é que não pode ser cada uma das outras opções. A aluna continua a manifestar muitas dificuldades em verbalizar as suas justificações. Elimina a opção A por a proposição q não ter o símbolo de negação antes, exclui a opção C por ter a negação em r ao invés de ter em p, mas depois de reler, compreende que esse facto não justifica a exclusão e, então, conclui que entre parêntesis tem uma disjunção e não uma conjunção. Na opção D apresenta a mesma justificação que para a opção C (figura 56):


a) porque a prosição que me é dada faz com que tenha $\sim q$ ao invés de q.

d, c) porque tenho uma dijunção dentro de parentises e não a conjunção.

Figura 56 – Justificações apresentadas pela Matilde

Depois de a Matilde ter escrito as suas justificações, a investigadora questiona-a se teria outra justificação que a levasse a excluir a opção C e a aluna apresenta essa justificação sem dificuldades e regista-a (figura 57):

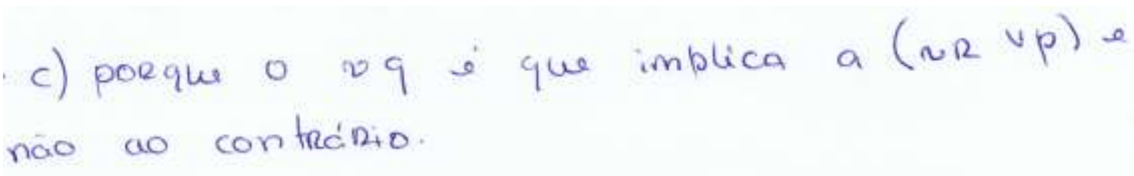

c) porque o $\sim q$ é que implica a $(\sim r \vee p)$ e não ao contrário.

Figura 57 – Outra justificação apresentada pela Matilde para a opção C

Questionada ainda sobre a relação da disjunção e da implicação, a Matilde não se recorda desta relação. A investigadora perguntar como se pode passar de $p\ implica\ q$ para uma disjunção, mas não obtém *feedback* por parte da aluna.

Inv. – Então, negamos o…

Matilde – Antecedente.

Inv. – Ou…?

Matilde – Afirmamos o consequente.

Assim, a Matilde transforma corretamente a disjunção da opção A numa implicação, no caso concreto (figura 58):

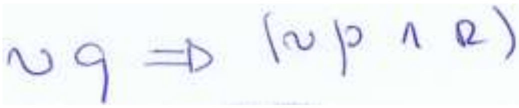


Figura 58 – Transformação da disjunção numa implicação feita pela Matilde

Quando a investigadora a questiona porque é que não pode ser a opção A, a aluna justifica corretamente com o facto de a negação não estar em r mas sim em p.

A Matilde revela-se insegura para responder à terceira questão. Traduz a primeira opção oralmente e só depois de a investigadora confirmar é que escreve no papel mas escreve as restantes sem verbalizar. Na opção C escreve toda a proposição sem o "Se" no início. Quando a investigadora a questiona sobre o "então" que tem na frase, a Matilde corrige para "Se a Maria gosta de gomas". Na última opção, depois de traduzida e corrigida a opção C, a aluna traduz facilmente, sem apresentar dificuldades (figura 59).

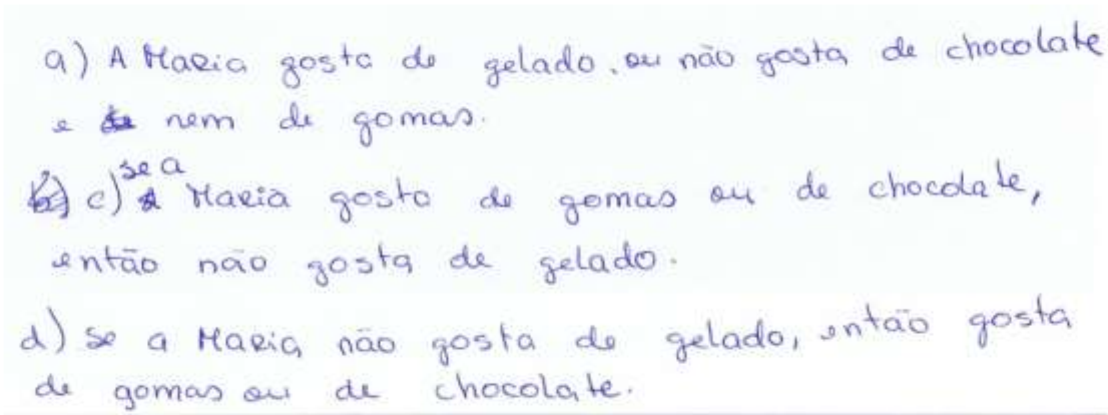


Figura 59 – Traduções para linguagem natural realizadas pela Matilde

Na realização desta tarefa, a aluna apresenta dificuldades em verbalizar os seus raciocínios e justificações devido essencialmente à existência de vários operadores em cada uma das opções dadas. Aparenta ter facilidade na tradução entre a linguagem simbólica e a linguagem natural, mas o encadeamento de várias operações causa alguma perturbação nos seus raciocínios.

4.3.4. Tarefa 3 (Anexo 3)

Quando confrontada com a resposta do Pedro "Se a soma de dois números inteiros é par, então o seu produto é ímpar", a Matilde responde de imediato considerando que a afirmação é verdadeira. A investigadora reforça o facto de serem quaisquer dois números inteiros e não apenas o exemplo apresentado. Perante esta intervenção a aluna reformula a sua resposta dizendo que o que o Pedro diz não é verdade porque "conseguimos encontrar dois números que negam esta proposição".

Aparentemente a Matilde parece conseguir fazer uma generalização do problema, mas quando a investigadora lhe pede para dar um exemplo de dois números, a Matilde diz que pensou no 22 e no 3 e que a soma dá 25 que não é par.

> Matilde – Eu fiz com o 22 e com o 3.
>
> Inv. – Então e não acontece o que o Pedro disse?
>
> Matilde – O Pedro diz que a soma de dois números inteiros é par. Não! 22 mais 3 dá 25. Que não é par.
>
> Inv. – O que ele diz é que se a soma der par, o produto dá ímpar.
>
> Matilde – Aahhh. Uma implica a outra.
>
> Inv. – Exatamente. Tu estás a dizer que a soma é ímpar, então esse caso não nos interessa. O antecedente não é verificado, portanto o consequente não nos interessa. Nós queremos casos que, se verificam o antecedente, também verificam o consequente. Ou casos que contradizem a implicação.
>
> Matilde – Stôra, eu fiz do 22 mais 3 que é 25 ou seja a soma já não é par. Mas também tenho de arranjar essa mesma… Esses dois números têm de verificar esta proposição [apontando para "A soma de dois números é par"] e esta [apontando para "O seu produto é ímpar"].
>
> Inv. – Exatamente. Para a proposição ser verdadeira. Para provar que o que o Pedro disse é verdade.
>
> Matilde – Então, esta [a afirmação do Pedro] é verdade!

A Matilde tenta fazer com que o antecedente seja falso para que não se verifique a implicação. A aluna não compreende que o facto de o produto dos dois números que escolhe dar ímpar não serve para justificar a falsidade da proposição, não sendo capaz de formular um contraexemplo.

Inv. – O Pedro diz que se a soma de dois números é par então o produto é ímpar. Isto é verdade?

Matilde – Não. O 22 mais 3 dá 25, já não verifica esta parte [apontando para "A soma de dois números é par"] e depois fiz o produto do 22 vezes 3, que dá 66.

Inv. – E então? Verifica ou não?

Matilde – Não! 66 não é ímpar.

Inv. – Sim… Mas 25 também não é par!

Matilde – Exato stôra! Então o que ele disse não é verdade.

Inv. – Quando temos numa implicação falso implica falso, é o quê?

Matilde – Verdadeiro.

Inv. – Então, segundo o teu exemplo, o que ele diz é verdade. Mas tu arranjaste um caso que a implicação é verdadeira. Chega um?

Matilde – Não. Tenho de arranjar mais.

Inv. – Mais quantos? Para dizer que é verdadeira, não basta um. Para dizer que é falsa, basta um. Se eu quiser dizer que o que o Pedro diz é mentira, basta-me arranjar um caso.

Matilde – Que eu já arranjei.

A Matilde continua a apresentar dificuldades em compreender que o facto de a soma dar ímpar não justifica que a proposição é falsa. A investigadora relê de novo a afirmação do Pedro e explica que o que o Pedro diz é que se escolher dois números e a soma der par então o seu produto dá ímpar:

Inv. – O Pedro diz que se eu escolher dois números e a soma der par então o produto é ímpar. Para quaisquer dois!

Matilde – Sim…

Inv. – Agora eu pergunto. Isto é verdade? Ou seja, se eu escolher dois números e a soma der par, o produto vai dar ímpar? Tu disseste o 22 e o 3. Somei e dá ímpar. Então não interessa para o caso!

Matilde – Então tenho de arranjar dois números que verifiquem isto [aponta para a afirmação do Pedro].

Inv. – Das duas uma: ou o que o Pedro disse é verdade e verifica-se para todos os números (…).

Matilde – Mas se eu quiser provar que é falso basta arranjar um caso em que…

Inv. – Quando é que uma implicação é falsa.

Matilde – Quando esta for falsa. A primeira.

A aluna mostra não dominar a implicação como um proceito e necessita de voltar à representação processual para poder inferir acerca da validade da afirmação que produziu. Analisa a tabela de verdade da implicação que tinha elaborado na sessão anterior e corrige a sua afirmação:

Inv. – Quando é qua a implicação é falsa. Em qual das quatro?

Matilde – É nesta. [indica na tabela de verdade a linha correspondente a verdadeiro implica falso]

Inv. – Exato. Quando se verifica o antecedente e não se verifica o consequente. Então, para podermos dizer que o que o Pedro disse é falso temos de arranjar um caso em que a soma seja par…

Matilde – E o produto seja ímpar. Hum…. Agora tenho de arranjar os dois números.

Inv. – Depende. Se quiseres provar que é falso, sim…

Matilde – Ok… Então é verdade, porque se eu somar…

Inv. – Para a soma dar par, que combinações é que podemos fazer dos dois números?

Inv. – Então, para a soma ser par…

Matilde – São os dois pares…

Inv. – Pensa lá o que é que pode acontecer em cada um desses casos…

A Matilde opta por fazer uma tabela para escrever os vários casos possíveis (a aluna preenche as três primeiras colunas) (figura 60).

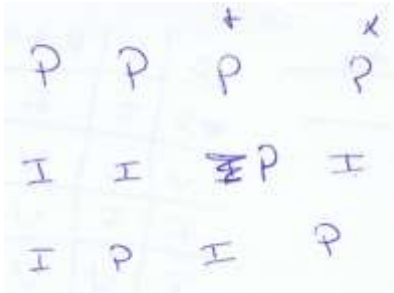


Figura 60 – Tabela com as propriedades dos números inteiros feita pela Matilde

Inv. – Então, o que é que o Pedro diz? Se a soma for par… Quais é que me interessam?

Matilde – Esta e esta [apontando para as duas primeiras linhas].

Inv. – Então este caso [apontando para a terceira linha] não interessa… É como o exemplo que estavas a dizer do 22 e do 3. Então agora vamos ver se a soma for par, se o produto é sempre ímpar. Se nos casos em que a soma é par, o produto for par, então o que o Pedro diz é verdade. Se houver pelo menos um caso [em que não], então o que ele disse não é verdade.

A Matilde preenche a quarta coluna da tabela que tinha feito anteriormente (figura 60) com o facto de o produto dos dois números ser par ou ímpar. Quando analisa a primeira linha, a Matilde conclui que o que o Pedro disse não é verdade porque há um caso que não verifica.

Inv. – Quais são os casos em que o que o Pedro diz é mentira?

Matilde – Quando são os dois pares.

A investigadora solicita à Matilde que lhe apresente, então, um exemplo e a aluna escolhe "o dois e o dois", conforme apresenta na sua resposta (figura 61).

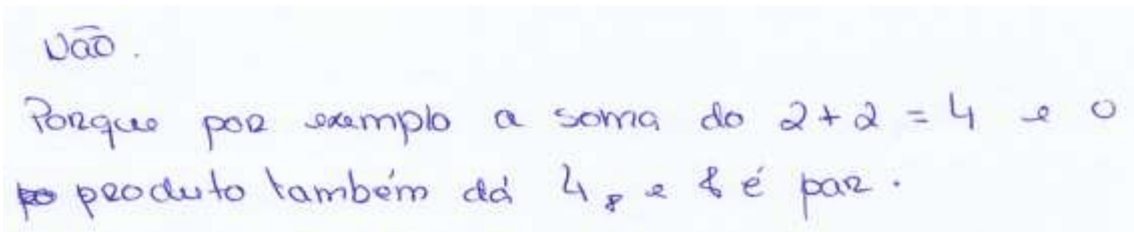


Figura 61 – Resposta da Matilde à questão 1 da tarefa 3

Depois de ler a afirmação do António, a Matilde não se manifesta e a investigadora intervém dizendo que, tal como na situação anterior, ou prova que é verdade ou então tem de arranjar um exemplo que não verifique a proposição.

Matilde – Stôra, é sempre mais fácil arranjar um caso em que isso não aconteça.

Inv. – E se o que ele disser for verdade?

Matilde – Ah pois…

Inv. – Se o que ele disser for verdade, onde é que arranjas um caso onde não acontece? Que ideia é que tu tens? Que é verdade ou mentira?

Matilde – Que é verdade.

Inv. – Porquê?

Matide – Então, stôra… Se o produto…

Inv. – Pensa… O que estás a pensar, diz alto.

Matilde – Oh stôra… Eu ia dizer o mesmo que comecei aqui, mas como eu estava a dizer não dá para justificar, porque se eu tiver o 3 mais 3… Não… Sim… 3 vezes 3 dá 9; é ímpar. E 3 mais 3 é 6; é par.

Inv. – Temos um caso em que acontece o que o António diz…

Matilde – Pois… Mas isso tinha de se verificar em todos… E eu não sei fazer isso.

Inv. – Que particularidade é que o 3 tem? Porque é que com o 3 funciona. Procura lá outros casos.

A Matilde encontra o caso ‘2 vezes 2’ e acha que, então, o que o António disse é falso, mas rapidamente corrige o seu raciocínio pois repara que a soma é par, mas o produto não é ímpar. A aluna considera ainda o exemplo do 5 e do 2 e diz que tem “de arranjar um caso em que o produto seja ímpar” (figura 62):

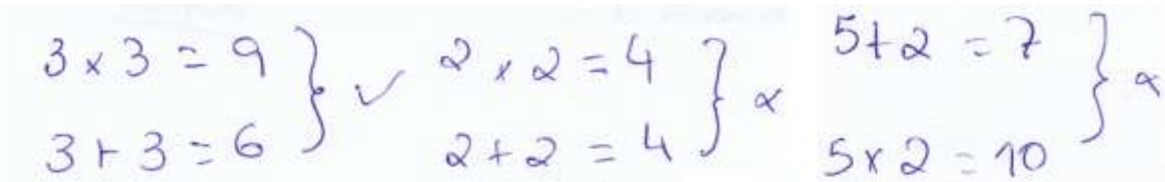


Figura 62 – Exemplos considerados pela Matilde

A investigadora questiona a Matilde sobre os casos que falaram anteriormente, em relação às combinações possíveis de dois números. A aluna recorre à tabela que fez anteriormente (figura 60) e verifica que para o produto ser ímpar só interessa a segunda linha e verifica ainda que então a soma é par.

A Matilde conclui que o que o António disse é verdade mas apresenta muitas dificuldades em verbalizar a justificação. Mesmo com recurso à tabela, não é capaz de explicar o seu raciocínio.

Matilde – Na outra nós fomos… Porque nós tínhamos duas…

Inv. – Tínhamos dois casos em que a soma era par mas havia um caso em que o produto dava ímpar…

Matilde – Sim… E nós arranjamos um caso que contrariava…

Inv. – E agora? Fazendo um raciocínio análogo. Quantos casos é que nos interessam?

Matilde – Só interessa o segundo.

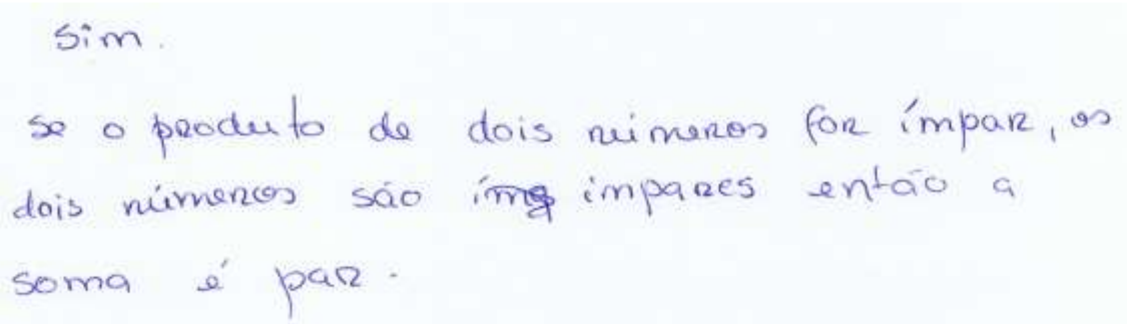
Inv. – Então esquece os outros… Então, sempre que o produto é ímpar, a soma é par?

Matilde – É.

Inv. – E que particularidade é que esses números têm?

Matilde – Os dois números são ímpares.

Depois deste diálogo, a Matilde não consegue escrever a sua justificação (figura 63):



Sim.

se o produto de dois números for ímpar, os dois números são ~~img~~ ímpares então a soma é par.

Figura 63 – Resposta da Matilde à questão 2 da tarefa 3

Durante a realização desta tarefa verifica-se que a aluna não compreendeu que para justificar que uma afirmação é falsa basta encontrar um caso que a contradiga e que o facto de o antecedente não se verificar não justifica que uma implicação é falsa. No que diz respeito à justificação de que uma afirmação é verdadeira, a aluna apenas compreendeu que não basta um ou dois casos pois apenas o fez com o auxílio da investigadora. A aluna apresenta muitas dificuldades em verbalizar uma justificação plausível. A Matilde não foi capaz de relacionar as afirmações com a lógica nem estabelecer um método de resolução que lhe permitisse provar as afirmações, apenas conseguindo fazer procedimentos simples. Neste contexto a abordagem que é capaz de fazer é incipiente.

4.3.5. Tarefa 4 (Anexo 4)

Quando confrontada com o enunciado da tarefa 4 a Matilde refere que vai partir da primeira expressão, primeiro membro da equivalência, e simplificar até obter o segundo membro. Não se recorda como fazer este tipo de demonstrações mas sugere fazer algo com a implicação, mas não sabe o quê:

Matilde – Eu acho que temos de fazer algo com isto [a implicação] acho que vai mudar este sinal.

Inv. – O que é que fazíamos logo com as implicações?

Matilde – Tirávamos?

Inv. – Exatamente… A primeira coisa é 'desfazermo-nos' das implicações. E como é que fazemos isso?

A Matilde não se recorda com transforma uma implicação numa disjunção e a investigadora relembra-a da primeira questão da segunda tarefa realizada pela aluna:

Inv. – Na segunda tarefa, lembras-te da primeira pergunta?

Matilde – Lembro.

Inv. – E lembraste qual era a relação?

Matilde – Não…

Inv. – É uma relação com uma disjunção?

Matilde – É!

Inv. – E que relação era essa?

Matilde – Negar o antecedente e mantemos o consequente.

Inv. – Era uma relação com que operação?

Matilde – Com a disjunção.

Inv. – Mas tu disseste aí um 'e'.

Matilde – Porque já tenho aqui um ‘ou’ [aponta para $\sim a \vee b$].

Inv. – Mas essa disjunção faz parte de um membro da implicação…

Matilde – Ah… Pois é…

Inv. – Como é que transformávamos uma implicação numa disjunção? Por exemplo, $a\ implica\ b$?

Matilde – Negar o antecedente ou manter o consequente.

Com o conhecimento que foi produzido neste diálogo, sobre transformar uma implicação numa disjunção, a investigadora sugere-lhe que o faça na sua demonstração. A Matilde apresenta algumas dificuldades por ter duas implicações pelo que a investigadora a questiona no sentido de saber se ela pode transformar as duas implicações em disjunções e a aluna concorda que é uma possibilidade.

Transforma a primeira implicação que aparece no primeiro membro, reconhecendo corretamente o antecedente e o consequente da implicação. Fazendo o mesmo raciocínio transforma a segunda implicação numa disjunção (figura 64). Na segunda transformação a Matilde não coloca os parêntesis curvos e a investigadora questiona-a se não lhe faltam parêntesis ou se os tem em excesso. A aluna rapidamente reconhece a falta e justifica-o com o facto de ter operações diferentes. Reconhece ainda que os outros parêntesis que aparecem riscados não são necessários por ter a mesma operação. Mais, a aluna só escreve os sinais de equivalente quando a investigadora questiona se não necessita de colocar um sinal, e qual o sinal que deve colocar (figura 64). O primeiro passo da demonstração da Matilde omite-se por se tratar da expressão do enunciado.

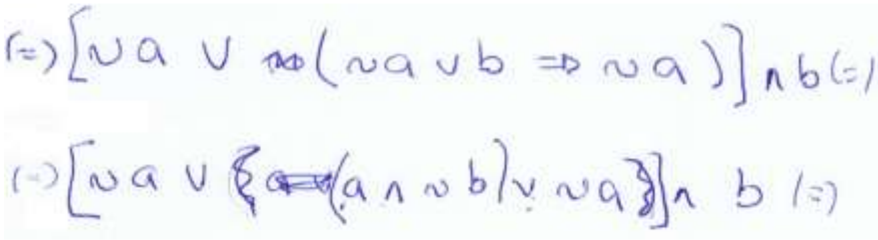


Figura 64 – Passos 2 e 3 da demonstração da Matilde

Inv. – Então, o facto de ter essas operações iguais interessa? Ou não?

Matilde – Vai, porque $não\ a$ ou $não\ a$ é a.

Inv. – É a?

Matilde – Sim… Eu sei que podemos fazer qualquer coisa…

Inv. – E que 'qualquer coisa' é essa? $não\ a$ ou $não\ a$… Não estamos a dizer duas vezes a mesma coisa?

Matilde – Estamos…

Inv. – E não posso dizer só uma? É equivalente ou não?

Matilde – É… Sim… Faz sentido… Se eu estou a dizer duas vezes a mesma coisa…

A investigadora pede à aluna que faça uma tabela de verdade para verificar se é equivalente a a ou a $não\ a$. A Matilde não se lembra como fazer, pelo que a investigadora a auxilia na construção da tabela. A investigadora questiona a aluna, para além do a, o que precisa mais na primeira linha e a aluna responde oralmente e de forma correta. O preenchimento da tabela é feito pela investigadora mas é a Matilde que dá todas as informações que lá são colocadas (figura 65):

a	$\sim a$	$\sim a \vee \sim a$
V	F	F
F	V	V

Figura 65 – Tabela de verdade da disjunção realizada pela investigadora, com a Matilde

Analisando a tabela a Matilde sabe justificar que $não\ a$ ou $não\ a$ é equivalente a $não\ a$ por os valores lógicos nas colunas correspondentes serem iguais. A Matilde prossegue a sua demonstração. Note-se que, a partir deste passo, a aluna deixa de escrever o símbolo de equivalência (figura 66):

$$[\sim a \vee (a \wedge \sim b)] \wedge b$$

Figura 66 – Passo 4 da demonstração da Matilde

Perante esta expressão a Matilde não sabe como proceder e a investigadora questiona-a relativamente às propriedades que conhece. A Matilde só se recorda da dupla negação que não é aplicável nesta situação e admite só se lembrar desta. A investigadora começa a enumerar as propriedades “associativa, comutativa, …”:

Inv. – Mais alguma?

Matilde – Hum… Não sei…

Inv. – Distributiva?

Matilde – Sim! Aqui pode ser a distributiva…

Inv. – E como é que fazes a distributiva?

A Matilde aplica bem a propriedade distributiva (figura 67) sem dificuldades e coloca os parêntesis curvos justificando que são necessários por ter operadores diferentes. No entanto a aluna coloca os parêntesis retos que, depois de a investigadora a questionar sobre a necessidade destes, reconhece não serem necessários.

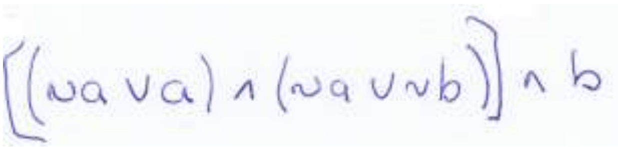


Figura 67 – Passo 5 da demonstração da Matilde

Nesta fase a Matilde começa a enumerar as propriedades anteriormente referidas na esperança de que a investigadora confirme qual delas usar. A investigadora questiona-a sobre o que pode simplificar em *não a* ou *não b* e a Matilde responde que nada, mas que pode fazer em *não a* ou *a* e recorre a uma tabela de verdade para verificar como pode simplificar a expressão (figura 68). A Matilde verifica que a proposição é sempre verdadeira e isso permite-lhe continuar a sua demonstração (figura 69).

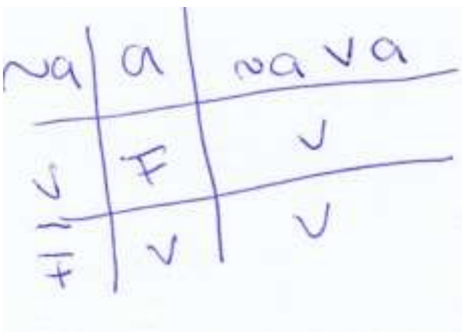


Figura 68 – Tabela de verdade da disjunção realizada pela Matilde

$$\sim \ \wedge (\sim a \vee \sim b) \wedge b$$

Figura 69 – Passo 6 da demonstração da Matilde

A Matilde reconhece que o $verdadeiro$ não tem influência na conjunção e diz que "já chegámos onde queríamos":

Inv. – O que é que o verdadeiro faz numa conjunção?

Matilde – Isto $[(\sim a \vee \sim b) \wedge b]$ também é verdadeiro!?

Inv. – Não sabemos, se é verdadeiro ou falso. Mas se for verdadeiro o que é que dá a conjunção?

Matilde – Verdadeiro.

Inv. – E se for falso?

Matilde – Falso.

Com isto, a Matilde conclui que "o verdadeiro não faz nada" na conjunção e simplifica a expressão (figura 70):

$$(\sim a \vee \sim b) \wedge b$$

Figura 70 – Passo 7 da demonstração da Matilde

A Matilde reconhece que tem de aplicar novamente a propriedade distributiva mas apresenta algumas dúvidas. A investigadora questiona-a sobre o que fazer quando tem uma conjunção e uma disjunção e a Matilde confirma que é a propriedade distributiva a que tem de usar. A aluna apresenta dificuldades em aplicar a propriedade mas quando a investigadora sugere que compare com a que fez anteriormente, a Matilde fá-lo sem dificuldades (figura 71).

$$(b \wedge \sim a) \vee (b \wedge \sim b)$$

Figura 71 – Passo 8 da demonstração da Matilde

Perante esta expressão a Matilde diz que b e *não* b é falso, mas faz uma tabela de verdade (figura 72) para confirmar a sua ideia. Depois de construir a tabela verifica que esta proposição é sempre falsa e reconhece imediatamente que o falso "não faz nada" na expressão e portanto, já concluiu o que se pretendia (figura 73).

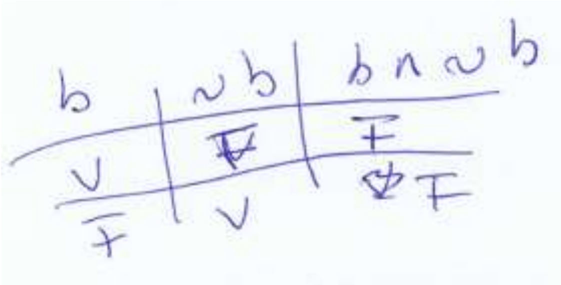


Figura 72 – Tabela de verdade da conjunção realizada pela matilde

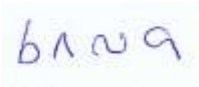


Figura 73 – Passo 9 da demonstração da Matilde

Durante a realização da tarefa a Matilde revela pouco conhecimento sobre as propriedades que aprendeu e apresenta algumas dificuldades na sua aplicação. A Matilde conclui esta demonstração mas tem algumas dificuldades em fazê-lo. Só é capaz de concluir o que é pedido com auxílio da investigadora. Por vezes tende a responder aleatoriamente na tentativa de que a investigadora confirme ou negue a sua resposta. A Matilde parece assim mostrar alguma capacidade na realização de operações e aplicação de propriedades lógicas, mas apenas no domínio procedimental. Mesmo em situações onde estão envolvidas operações simples ela necessita de recorrer aos procedimentos elementares e nem sempre os consegue operacionalizar. No domínio da demostração ela parece situar-se ao nível da interiorização dos conceitos manifestando um pensamento processual pouco elaborado.

No teste realizado no primeiro período a Matilde não realizou a demonstração. De facto, não realizou muitos dos exercícios que eram propostos. Esta ausência de resolução pode prender-se com o facto de a Matilde ser uma aluna muito insegura das suas capacidades e que fica muito nervosa em situações de teste.

4.4. Salvador

Apresenta-se uma breve caraterização do Salvador e, tendo em conta os objetivos das tarefas referidos no capítulo 3, proceder-se-á à análise do seu desempenho na realização das tarefas propostas.

4.4.1. Caraterização do Salvador

O Salvador tem 16 anos. Durante o presente ano letivo apresentou um desempenho fraco tendo obtido as classificações de 9 valores no primeiro período e 7 valores no segundo. Terminou o ano com a classificação final de 8 valores à disciplina. No seu percurso académico já registou uma reprovação. Terminou o 9º ano com classificação de 3, sendo que no Exame Nacional obteve 2.

O Salvador revelou ser um aluno empenhado, embora tenha revelado algumas dificuldades na disciplina. Durante as aulas é participativo, oferece-se para ler e para ir ao quadro. Durante um grande número de aulas o aluno ocupou lugares na primeira fila sendo que no início do ano estava acompanhado por outro colega na mesma mesa e posteriormente optou por ficar sozinho, considerando que desta forma se poderia concentrar melhor. Apesar disso, o aluno distrai-se com frequência, com os colegas.

Relativamente ao seu empenho na disciplina, o aluno frequentou a grande maioria das aulas de apoio que eram disponibilizadas pela escola. Durante o primeiro período o aluno revelou algumas dificuldades em apresentar todos os trabalhos de casa que foram solicitados. No entanto na restante parte do ano letivo empenhou-se e realizou a grande maioria destes.

4.4.2. Tarefa 1 (Anexo 1)

4.4.2.1.Questão 1

Quando colocado perante a primeira questão, o aluno hesita, mas não tem dificuldade em dar a resposta. Justifica a sua resposta dizendo:

Salvador – A proposição diz ‘Se a Maria passar de ano recebe uma prenda’. Então, se ela passa de ano recebe uma prenda.

Inv. – Então é isso que te vou pedir que escrevas.

Salvador – Por extenso ou…?

Inv. – Por extenso ou o quê? O que é que queres dizer? Por extenso ou…?

Salvador – Com implicações.

O aluno hesita na forma como deve escrever a sua resposta, oscilando entre a escrita em linguagem natural e a representação simbólica. A investigadora deixou ao critério do aluno, pelo que ele opta por escrever a primeira parte da resposta em linguagem natural “A Maria passou de ano”, mas denota alguma dificuldade em completar a sua justificação. Após alguma hesitação acabou por escrever a resposta apresentada na figura 74:

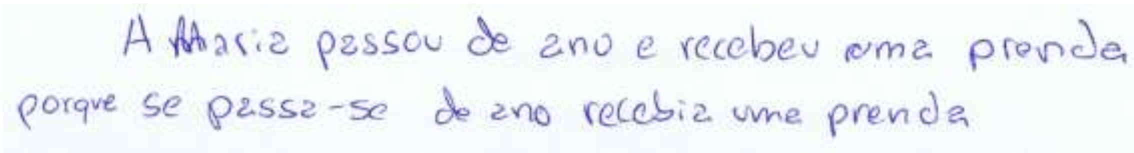

A Maria passou de ano e recebeu uma prenda
porque se passa-se de ano recebia uma prenda

Figura 74 – Resposta do Salvador à 1ª questão da Tarefa 1

Na sua resposta o Salvador não parece evidenciar a implicação que é apresentada na proposição inicial. Tal facto parece causar-lhe alguma dificuldade na justificação da sua resposta quando a pretende apresentar na forma de linguagem natural. Embora tenha referido no diálogo anterior a implicação, acaba por fazer a ligação entre o antecedente e o consequente através da conjunção ‘e’. Pelo facto de não ter sido solicitada a escrita simbólica da resposta dada subsiste a dúvida sobre a forma como o Salvador operacionalizou a sua resposta a esta questão.

4.4.2.2. Questão 2

Na segunda situação o aluno responde corretamente e sem dificuldades.

Salvador – A Maria não passou de ano.

Inv. – Não passou de ano porque…?

Salvador – Porque se a Maria passar de ano, irá receber uma prenda. Se ela não recebeu, significa que não passou de ano.

Depois de dada a resposta, a investigadora pediu ao Salvador que escrevesse em linguagem simbólica a proposição inicial. O aluno escreveu $p \Rightarrow q$, sendo de seguida questionado sobre o que representam o p e o q , ao que o aluno atribui uma designação a cada uma letras que usou (figura 75):

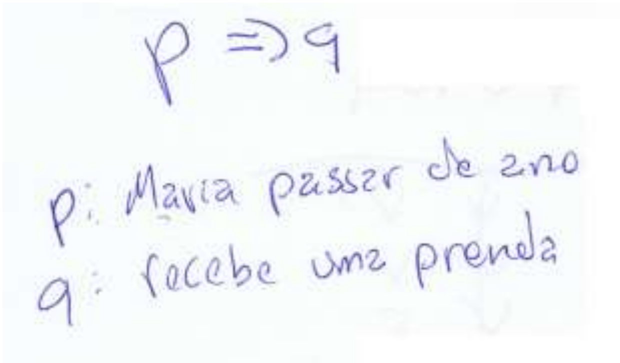


Figura 75 – Representação simbólica apresentada pelo Salvador

De seguida a investigadora pediu de novo ao aluno que escrevesse, em linguagem simbólica, a sua resposta à questão dois. Esta abordagem traz algumas dificuldades ao aluno. Ele começa por dizer que "Como ela não passou de ano, logo não recebeu uma prenda". A investigadora chama à atenção para o facto de apenas se saber que a Maria não recebeu uma prenda:

> Inv. – Nós não sabemos se ela não passou. Só sabemos que não recebeu uma prenda. Tu disseste 'se ela não recebeu uma prenda…'
>
> Salvador – Então não passa de ano.

Quando é, novamente, solicitado que apresente a resposta em linguagem simbólica o aluno escreve $\sim p \Rightarrow \sim q$. A investigadora volta a questionar qual era a sua resposta e o aluno diz que "Se a Maria não passar de ano, não receberá uma prenda", enquanto aponta para o que escreveu. A investigadora questiona-o para saber se o que escreveu é o mesmo que respondeu inicialmente. O aluno parece compreender que a sua afirmação inicial não traduzia a sua resposta e escreve a implicação correta ($\sim q \Rightarrow \sim p$) acabando por reconhecer que ela é equivalente a $p \Rightarrow q$ referindo que é a contrarrecíproca desta.

Nesta questão a tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica pareceu ajudar a concretizar a resposta correta, eliminando algumas das interpretações menos claras que ele evidenciou quando tentou dar uma resposta apenas com base na linguagem natural. A utilização simultânea de ambas as representações parece ajudar a estruturar o raciocínio lógico do aluno.

4.4.2.3. Questão 3

Na terceira situação o aluno revela algumas dificuldades em operacionalizar a sua resposta. Inicialmente diz que a Maria não recebe uma prenda.

> Inv. – Sabemos que a Maria não passou de ano. Recebeu uma prenda?
>
> Salvador – Se a Maria passou de ano, recebe uma prenda. Se a Maria não passou de ano… Não recebe uma prenda.

Dada a dificuldade que o aluno mostra em apresentar uma resposta com segurança, a investigadora questiona-o acerca do que ele sabe sobre o valor lógico de uma implicação e este não tem dificuldades em reconhecer que uma implicação apenas é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso.

Quando questionado sobre o valor lógico de p e q, o aluno conclui que $\sim p$ é verdadeiro e portanto p é falso. Voltando à implicação inicial ($p \Longrightarrow q$), o aluno volta a responder que "Se ela não passar, não recebe".

A investigadora pede ao aluno que escreva em linguagem simbólica as afirmações que já produziu, isto é, (p é falso e $p \Longrightarrow q$ é verdadeiro) e volta a questionar se a Maria recebeu ou não uma prenda. Desta vez o aluno responde que "a Maria recebeu uma prenda".

O aluno continua com dificuldades em estabelecer se a Maria recebeu ou não a prenda, dando respostas contraditórias. Só quando é confrontado com o facto de a implicação ser verdadeira e o antecedente ser falso, e a investigadora volta a questionar se a Maria recebeu ou não uma prenda, é que o aluno responde que pode receber ou não. Conclui que, como a implicação é verdadeira e o antecedente é falso, o consequente pode ser verdadeiro ou falso.

A justificação apresentada pelo aluno, depois de discutir a situação com a investigadora foi a seguinte:

~p é verdadeiro
p é falso
p => q verdadeiro

O valor logico de q poderá ser Verdadeiro ou falso porque a implicação p => q é verdadeira sabendo que o valor logico de p é falso

Figura 76 – Representação da resposta do Salvador relativa à questão 3

Neste caso a dificuldade em operacionalizar a tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica revelou-se um obstáculo para a compreensão da questão apresentada. O aluno parece apresentar algum domínio sobre a validade da proposição quando esta é apresentada na sua representação simbólica, mas o mesmo não acontece quando tenta estabelecer a sua validade com base na linguagem natural.

4.4.2.4. Questão 4

Na quarta situação, a primeira resposta do Salvador é que a Maria passou de ano. Quando questionado sobre as razões que o levam a estabelecer esta relação ele respondeu que "Se a Maria passar de ano, recebe uma prenda. Se a Maria recebeu uma prenda, logo passou de ano". Mais uma vez é manifesta a dificuldade que o Salvador tem na compreensão da implicação quando as premissas são apresentadas na linguagem natural. Para ultrapassar esta situação a investigadora recorreu à representação simbólica e questionou verbalmente o aluno se $p \Longrightarrow q$ é equivalente a $q \Longrightarrow p$, ao que ele respondeu que sim. De seguida é-lhe solicitado que faça uma tabela de verdade para cada uma das implicações referidas e só através deste processo o aluno conclui que estas não são equivalentes compreendendo que estava em causa a afirmação que tinha feito anteriormente, onde referia que a Maria passou de ano.

Como a interação anterior com a investigadora não foi suficiente para ajudar o aluno a responder adequadamente à questão colocada, ela sugere-lhe que faça um raciocínio análogo ao que fez na questão 3.

> Salvador – Eu estava a ver aqui [apontando para a resposta da questão 3] se 'não p' é falso, ou seja, p é verdadeiro. $p \Longrightarrow q$ é uma proposição verdadeira.
>
> Inv. – E na situação 4? O que é que nós temos? O que disseste foi a situação 3, não foi?
>
> (…)
>
> Salvador – 'Não q' é falso.
>
> Inv. – Porque é que 'não q' é falso?

Salvador – Porque está a dizer que se a Maria recebe uma prenda… q é verdadeiro.

Inv. – E o que é que sabemos mais?

Salvador – Que $p \Longrightarrow q$ é verdadeiro.

O aluno escreve:

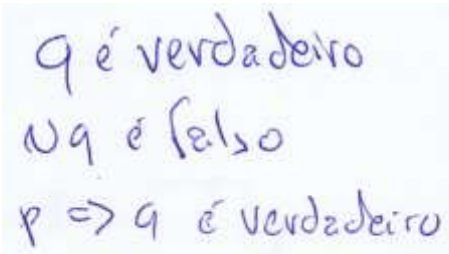


Figura 77 – Representação feita pelo Salvador

Inv. – Portanto, agora estou a perguntar se ela passou de ano. O que é que eu quero saber? Analogamente à pergunta de há bocado, eu perguntei-te se a Maria recebeu uma prenda, queria saber o quê? … Relativamente à implicação, sabemos o quê?

Salvador – Que a implicação é verdadeira e que q é verdadeiro.

Inv. – Eu estou a perguntar se a Maria passou de ano. O que é que eu quero saber?

Salvador – Quer saber o valor lógico de p. Então…

Inv. – O que é que sabes dizer sobre o valor lógico de p.

Salvador – Não sei dizer, porque a proposição é verdadeira independentemente do valor lógico de p.

Inv. – É independente do valor lógico de p porquê?

Salvador – Porque para uma implicação ser falsa, o antecedente tem de ser verdadeiro e o consequente falso. Se q… Se o consequente for verdadeiro a implicação vai ter de ser verdadeira.

O aluno, conclui assim que p tanto pode ser verdadeiro como falso, analogamente ao que acontecia na situação 3.

Analogamente ao que acontece na situação anterior, o aluno aparenta dominar a validade da proposição quando apresentada na sua representação simbólica, mas o mesmo não acontece quando tenta estabelecer a sua validade com base na linguagem natural. A tradução para a linguagem simbólica pareceu ajudar a concretizar a resposta correta.

4.4.3. Tarefa 2 (Anexo 2)

Quando é apresentada a primeira questão, de escolha múltipla, a opção tomada pelo aluno é a tradução para linguagem simbólica.

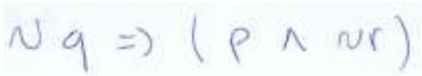


Figura 78 – Tradução para linguagem simbólica apresentada pelo Salvador

O aluno compara a sua tradução com as quatro opções disponibilizadas e diz que as opções B e D são as respostas corretas. A investigadora questiona-o sobre o facto de ele estar a considerar que as respostas B e D dizem a mesma coisa ao que o aluno, depois de analisar cada uma mais em pormenor, diz que não. É-lhe pedido que explique o porquê de inicialmente dizer que eram iguais, mas nesta fase admitir que são diferentes:

Salvador - Por causa da disjunção.

Inv - Exatamente. Um é disjunção, e o outro é conjunção.

Salvador - Então o D não é.

Depois de concluir que a resposta correta não é a D, o aluno analisa cada uma das outras opções procurando explicar a razão porque não podem representar a proposição dada. Cada uma dessas justificações foi posteriormente registada, como se mostra na figura 79:

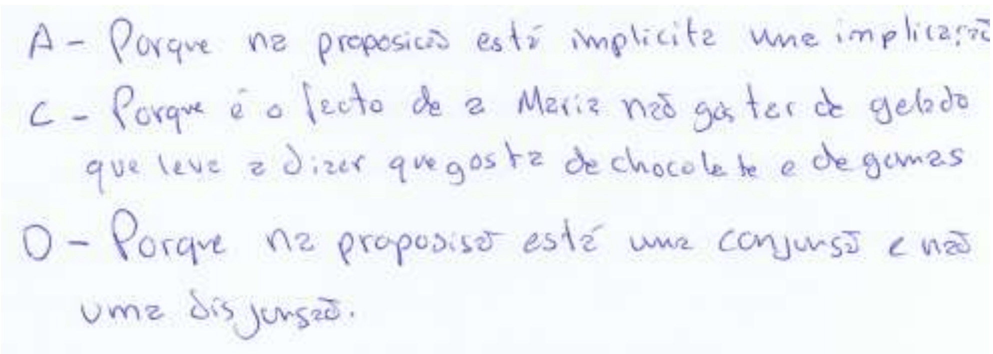


Figura 79 – Resposta do Salvador à segunda questão da tarefa 2

Depois de escritas as justificações, a investigadora confronta o aluno com o facto de a disjunção poder ser relacionada com a implicação e quando questionado como pode passar de uma implicação $p \Longrightarrow q$ para uma disjunção, o aluno responde "$p \vee \sim q$". A investigadora sugere que faça uma tabela de verdade para ambas as proposições, ao que o aluno conclui que não é $p \ \vee\sim q$ como dizia inicialmente.

Inv. – São equivalentes?

Salvador – Não…

Inv. – Portanto, não era a transformação que nós fazíamos…

Salvador – Não…

Inv. – Então como é que era?

Salvador – $\sim p \vee q$.

De seguida, a investigadora pede ao aluno que transforme a disjunção da opção A numa implicação. O aluno faz a transformação sem dificuldades, mostrando um bom domínio na manipulação simbólica. Quando é questionado sobre o facto de a sua justificação para não escolher a opção A se basear na não existência de uma implicação, o aluno justifica corretamente que esta continua a não poder ser a opção correta porque a negação está em p ao invés de estar em r.

Na terceira e última questão, onde se pedia para traduzir para linguagem natural as restantes proposições, o aluno traduz corretamente e sem dificuldades a opção A. No entanto, na opção C começou por apresentar a seguinte tradução:

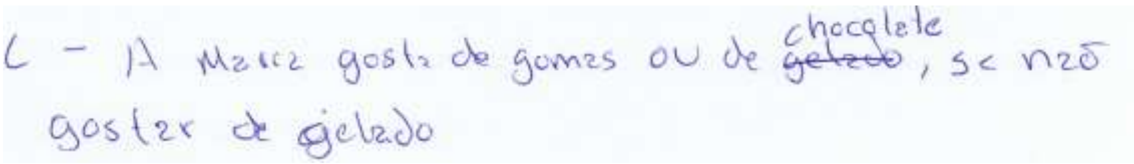


Figura 80 – Tradução do Salvador para a opção C

A investigadora pede que releia o que escreveu e o aluno vê que repetiu gelado e corrige para chocolate. Voltando a questioná-lo sobre a forma como traduziu a proposição $(\sim r \vee p) \Rightarrow\sim q$, ele acaba por dar uma resposta igual à que escreveu anteriormente. A investigadora insiste em que ele faça de novo a leitura da opção B:

Salvador - A Maria não gosta de gelado se gostar de gomas e de chocolate.

Inv – Então… Mas tu disseste que esta opção traduzia o que está aqui escrito… Lê lá o que está aqui escrito [aponta para a proposição inicial].

Salvador – Se a Maria não gosta de gelado… Então gosta de chocolate e de gomas.

Inv – Ok… Então agora lê lá a implicação de baixo [referindo-se à opção C].

Salvador – A Maria gosta de gomas… A Maria gosta de gomas ou… Aaaah…. A Maria gosta de gomas ou de chocolate se…

Inv – Outra vez… Tu dizes que “Se a Maria não gosta de gelado então gosta de chocolate e de gomas” se traduz nesta implicação, certo? [proposição inicial] (…) Então traduz lá a opção C… Por analogia com o que está aqui [apontando para a opção B e para a proposição em linguagem natural].

Salvador – A Maria gosta de gomas ou de chocolate se não gostar de…

Nesta fase, a investigadora questiona o aluno sobre quais as proposições que integram o antecedente e o consequente, na opção B. O aluno distingue facilmente “A Maria não gostar de gelado” como antecedente e “A Maria gostar de chocolate e de gomas” como consequente. Quando lhe é solicitado que indique, na opção C, qual o antecedente e o consequente, o aluno volta a distinguir facilmente $\sim r \vee p$ como antecedente e $\sim q$ como consequente.

Dada a facilidade de distinção por parte do aluno, a investigadora questiona-o se depois do “Se” aparece o antecedente ou consequente e o aluno não tem dificuldades em responder que é o antecedente. Volta a pedir ao aluno que traduza a opção C para linguagem natural e, desta vez, o aluno traduz corretamente.


C - Se a Maria gosta de choclate ou gomas então não gosta de gelado

Figura 81 – Correção da tradução do Salvador para a opção C

Na opção D o Salvador não manifestou dificuldades na tradução devido à análise mais profunda que foi feita no caso da opção C.

Na realização desta tarefa, o aluno aparenta ter uma maior facilidade na tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica, como se pode verificar na realização da primeira questão. A transformação de algumas proposições apresentadas em linguagem simbólica noutras equivalentes revela-se ainda uma tarefa complexa. No entanto, quando é solicitado a realizar a tradução da linguagem simbólica para a linguagem natural revela algumas dificuldades que se prendem essencialmente com a tradução da implicação nos casos em que o antecedente ou o consequente são compostos por mais do que uma proposição.

4.4.4. Tarefa 3 (Anexo 3)

Ao ser confrontado com a resposta do Pedro "Se a soma de dois números inteiros é par, então o seu produto é ímpar", o Salvador responde quase de imediato considerando que a afirmação é verdadeira. Quando questionado sobre o porquê da veracidade da afirmação, o aluno justifica dizendo "Então stôra, porque a soma de dois números ímpares vai dar sempre par". A investigadora fez notar o facto de serem dois números inteiros e não dois números ímpares, ao que o aluno respondeu:

> Salvador – Ah …Ok… Se a soma de dois números inteiros é par, então o seu produto é ímpar… Não… Não… Porque pode ser a soma de dois números pares e por exemplo $2 + 2 = 4$ e $2 \times 2 = 4$ e o produto não é ímpar.

O aluno apresenta algumas dificuldades em reproduzir no papel aquilo que verbalizou. No entanto, reproduz corretamente o seu raciocínio (figura 82):

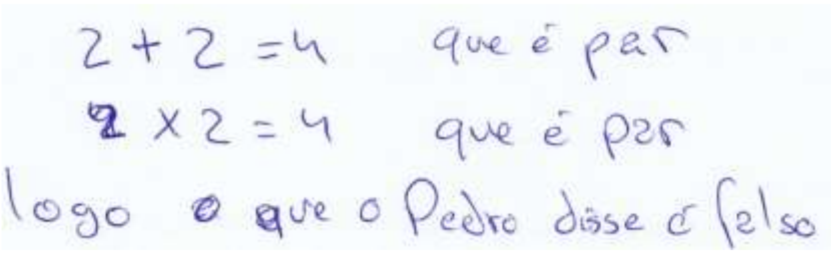


Figura 82 – Resposta do Salvador à questão 1 da Tarefa 3

O Salvador considera que a justificação que deu é suficiente para explicar a afirmação do Pedro, no entanto não sente necessidade de justificar que um contraexemplo é suficiente para justificar este raciocínio.

Relativamente à segunda questão, onde o António afirma que "Se o produto de dois números inteiros é ímpar, então a sua soma é par", o Salvador admite que a afirmação é verdadeira, após alguma reflexão:

> Salvador – A do António acho que é verdade.
>
> Inv. – É verdade? Porquê?
>
> Salvador – Ah... Espere… Já está a fazer sentido…
>
> (...)
>
> Salvador – Eu estou a pensar é que para o produto ser ímpar tem de ser a multiplicação de dois ímpares. Logo a soma de dois ímpares também é ímpar.
>
> Inv. – É ímpar?
>
> Salvador –Não, não, não…

A investigadora sugere ao aluno que reproduza os seus raciocínios no papel. O aluno recorre a casos concretos como se pode ver na figura 83, e a seguir diz "Sim… É verdade…".

$$3 \times 3 = 9 \qquad 3 + 3 = 6$$
$$5 \times 3 = 15 \qquad 5 + 3 = 8$$

Figura 83 – Exemplos apresentados pelo Salvador para justificar a sua resposta

Perante esta resposta a investigadora volta a questionar o Salvador:

> Inv. – Tu fizeste o caso 5×3 que dá 15 e $5 + 3$ que dá 8. Fizeste o 3×3 que dá 9 e $3 + 3$ que dá 6 e dizes que é sempre verdade!?
>
> Salvador – Sim…
>
> Inv. – Porquê? Tu deste-me dois exemplos em que é verdade. Isso prova para todos os números?
>
> Salvador – Sim…
>
> …
>
> Inv. – Porque é que foi o 5 e o 3 que tu usaste? Porque é que não usaste o 2 e o 3? Ou o 4 e o 3? Ou o 5 e o 10?
>
> Salvador – Pois… Porque esses eram o que eu estava a pensar.

Inv. – O que é que te levou a escolher o 5 e o 3?

Salvador – Porque são dois ímpares e eu já tinha pensado na minha cabeça… Então mas pronto… Eu posso experimentar… Não, mas… O…

Inv. – Diz o que é que estás a pensar alto!

Salvador – Stôra… Um par a multiplicar por um par é par. Um ímpar a multiplicar por um par, é par. Dois ímpares, é ímpar.

O aluno continua a raciocinar com base em pares de números concretos, mas consegue verbalizar todos os casos possíveis conjeturando sobre o facto de ter escolhido apenas números ímpares na primeira abordagem. No entanto, quando lhe é pedido que escreva a sua resposta, o aluno revela algumas dificuldades na sua operacionalização e a resposta que reproduz não reflete uma compreensão inequívoca da conjetura que estabeleceu anteriormente (figura 84):

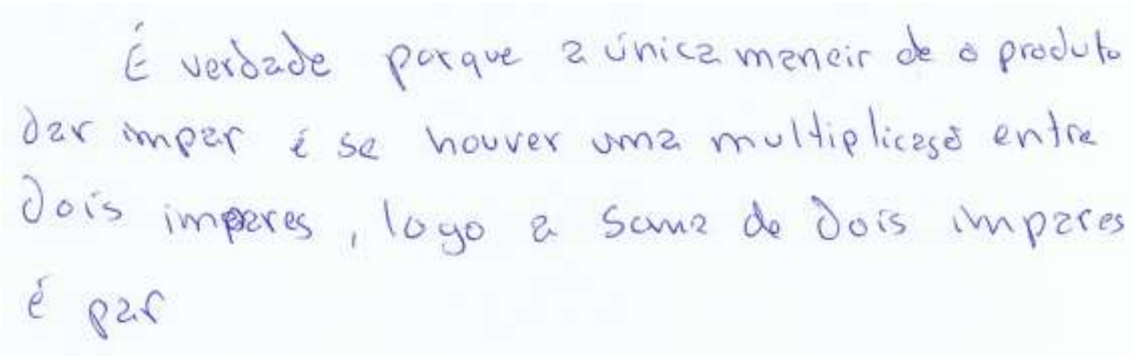

É verdade porque a única maneir de o produto dar impar é se houver uma multiplicaçõ entre dois impares, logo a soma de dois impares é par

Figura 84 – Resposta à questão 2, apresentada pelo Salvador

Durante a realização desta tarefa o aluno aparenta ter compreendido que para justificar que uma afirmação é falsa basta encontrar um caso que a contradiga. No entanto, no que diz respeito à justificação de que uma afirmação é verdadeira, o aluno revela alguma dificuldade em compreender que não basta um ou dois casos. Apesar dessa dificuldade, o aluno é capaz de verbalizar uma justificação plausível, sem no entanto esboçar um raciocínio que lhe permita generalizar a sua conclusão.

4.4.5. Tarefa 4 (Anexo 4a)

Para a realização da demonstração pedida na tarefa 4, o aluno reconhece que, para provar a equivalência, tem de, a partir de um dos membros da equivalência e, por um processo de simplificações sucessivas baseadas nas propriedades das operações envolvidas, chegar à outra expressão.

Salvador – Posso começar já com esta implicação, não é?

Inv. – E vais fazer o quê com a implicação?

Salvador – Dava-me jeito… Dava-me jeito uma disjunção…

O aluno compreende a necessidade de transformar a implicação numa disjunção e consegue fazê-lo corretamente: “negar o antecedente ou manter o consequente”. O facto de saber transformar a implicação numa disjunção parece estar relacionado com a discussão que foi feita anteriormente, durante a realização da tarefa 2.

Depois de realizar o primeiro passo, o aluno diz “Agora também tenho de me livrar deste… Desta implicação…” [aponta para a primeira implicação do primeiro membro da expressão].O aluno transforma assim as duas implicações em disjunções e obtém a primeira expressão da figura 85. Questionado pela investigadora relativamente à necessidade dos primeiros parêntesis curvos no passo 3, o aluno reconhece que estes não são necessários pois tem duas disjunções pelo que no passo 4 não os escreve.

Salvador – Como são duas disjunções… E é aquela propriedade… Comutativa…

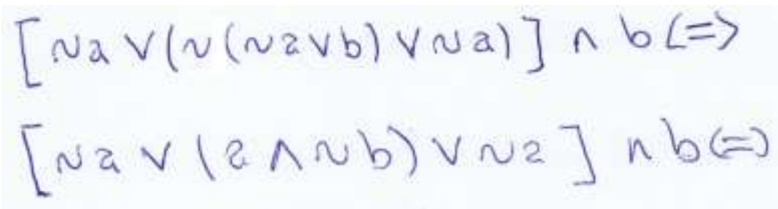


Figura 85 – Passos 3 e 4 da demonstração do Salvador

Nesta fase, o aluno manifesta que quer transformar a conjunção numa disjunção e quando questionado como faz essa passagem, ele responde que “fiz foi da implicação” pois não tem em consideração que não há, nesta situação, uma propriedade que relacione a conjunção e a disjunção, mas sim a implicação e a disjunção.

A investigadora pergunta, nesta fase, o que é que o aluno pode fazer, tendo em consideração que ele referiu, anteriormente, a propriedade comutativa. Pergunta-lhe também se tem necessidade de escrever duas vezes “$\sim a$” e o aluno responde que “não, porque $\sim a \vee \sim a$ é verdade”. O aluno só compreende que pode simplificar a expressão para $\sim a$ quando a investigadora lhe pergunta “se eu disser ‘eu não vou ou não vou’ ou se disser só ‘eu não vou’ estou a acrescentar alguma informação?”.

$$[\sim a \vee (a \wedge \sim b)] \wedge b \Leftrightarrow$$

Figura 86 – Passo 5 da demonstração do Salvador

Nesta fase, figura 86, o aluno reconhece rapidamente que tem de aplicar a propriedade distributiva. No entanto, troca a disjunção com a conjunção, isto é, diz que fica $(\sim a \wedge a) \vee (\sim a \wedge b)$. A investigadora sugere que faça uma analogia com a propriedade distributiva do produto em relação à adição e o aluno corrige o que disse, efetuando corretamente a propriedade distributiva (figura 87).

$$[(\sim a \vee a) \wedge (\sim a \vee \sim b)] \wedge b \Leftrightarrow$$

Figura 87 – Passo 6 da demonstração do Salvador

Salvador – Isto sabemos que é verdade [apontado para $\sim a \vee a$].

Inv – Porquê?

Salvador – Porque ou vou ou não vou.

O aluno reconhece que que a proposição $\sim a \vee a$ é verdadeira (figura 88). No entanto, não se recorda dos nomes dos princípios que estão a ser usados. Quando a investigadora os enumera ele responde aleatoriamente que este é o Princípio da Não Contradição. Depois de a investigadora o corrigir e dizer que é o Princípio do Terceiro Excluído pede ao aluno que o explique, mas ele não é capaz de verbalizar qualquer explicação.

$$[V \wedge (\sim a \vee \sim b)] \wedge b \Leftrightarrow$$

Figura 88 – Passo 7 da demonstração do Salvador

Salvador – Agora depende deste [apontando para $\sim a \vee b$]… Preciso do valor lógico de $\sim a \vee b$.

Inv – Então, mas agora o que é que vai passar para o passo seguinte. Temos verdadeiro e qualquer coisa…?

Salvador – Sim…

Inv – Nessa conjunção, esse verdadeiro faz diferença?

Salvador – Faz…

(…)

Inv – Que influência é que tem uma proposição verdadeira numa conjunção? Se eu tiver verdadeiro e falso…

Salvador – É falso…

Inv – Verdadeiro e verdadeiro…

Salvador – Verdadeiro…

Inv – Então, o verdadeiro tem alguma influência?

Salvador – Aahh... Não…

Inv – Então ter verdadeiro e qualquer coisa é equivalente a ter o quê?

Salvador – Qualquer coisa… Aahhh…

Simplificando, o aluno obtém a expressão que se pode ver na figura 89:

$$(\sim a \vee \sim b) \wedge b \Leftrightarrow$$

Figura 89 – Passo 8 da demonstração do Salvador

O aluno reconhece, novamente, que tem de aplicar a propriedade distributiva e, desta vez, aplica-a de forma correta (figura 90):

$$(b \wedge \sim b) \vee (b \wedge \sim a) \Leftrightarrow$$

Figura 90 – Passo 9 da demonstração do Salvador

Quando se depara com esta situação, o aluno diz que $b \wedge \sim b$ é verdadeiro, mas rapidamente corrige dizendo “Não, é falso. Tinha de ser uma disjunção”.

$$f \vee (b \wedge \sim a) \Leftrightarrow$$

Figura 91 – Passo 10 da demonstração do Salvador

Perante esta expressão (figura 91), o aluno diz “Já está” pois reconhece a expressão a que quer chegar. Diz ainda “Como é uma disjunção, depende do resto” e conclui a sua demonstração.

$$b \wedge \sim a \Leftrightarrow \sim a \wedge b$$

Figura 92 – Passos 11 e 12 da demonstração do Salvador

Durante a realização de toda a tarefa o aluno revela conhecer e saber aplicar a maioria das propriedades que aprendeu. Apesar disso não se recorda dos nomes ou não associa corretamente o nome à propriedade. Por vezes tende a responder aleatoriamente na tentativa de que a investigadora confirme ou negue a sua resposta. Quando questionado sobre o porquê de pensar assim, o aluno tem dificuldades em expressar-se embora às vezes aparente ter feito o raciocínio correto. No que se refere ao processo demonstrativo ele consegue identificar os procedimentos a realizar para fazer a demostração pedida.

Esta mesma demonstração fazia parte de um dos testes sumativos realizado pelo aluno no primeiro período. No teste o aluno apresentou um desempenho fraco e revela muitas dificuldades na realização da demonstração. Efetua alguns passos, no entanto revela não saber aplicar algumas propriedades corretamente. O aluno aplica bem a relação entre a implicação e a disjunção mas não a aplica na situação correta e aplica a propriedade comutativa na implicação. O Salvador efetua corretamente a propriedade distributiva. Além disso o aluno não é capaz de associar corretamente algumas das propriedades à sua designação. As dificuldades apresentadas pelo Salvador no contexto da entrevista são semelhantes aos da situação do teste embora não cometa os mesmos erros.

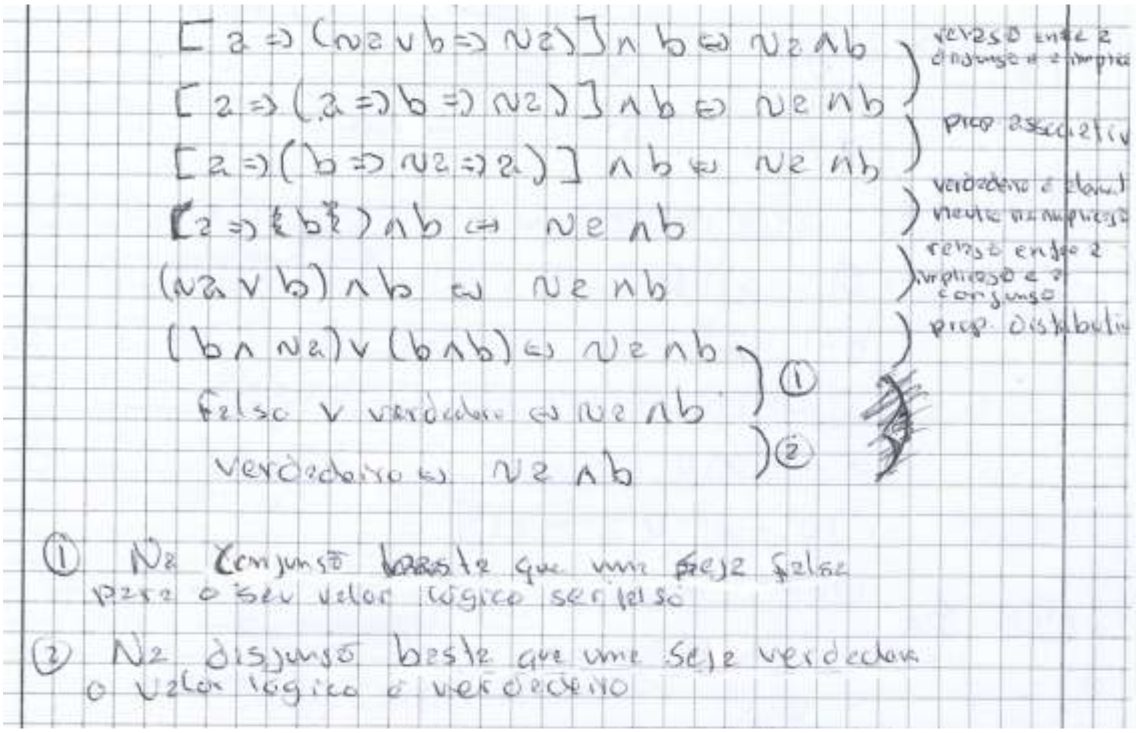


Figura 93 – Demonstração realizada pelo Salvador no teste de avaliação

4.5. Santiago

Apresenta-se uma breve caraterização do Santiago e, tendo em conta os objetivos das tarefas referidos no capítulo 3, proceder-se-á à análise do seu desempenho na realização das tarefas propostas.

4.5.1. Caraterização do Santiago

O Santiago tem 16 anos. O seu desempenho durante o ano letivo foi regular tendo obtido a avaliação quantitativa de 11 valores em todos os períodos. Não registou retenções no seu percurso académico e terminou o 9º ano com classificação de 4, obtendo a mesma no Exame Nacional.

O Santiago revelou ser um aluno empenhado, mas revelou algumas dificuldades na compreensão dos conceitos em estudo. Durante as aulas, expôs as suas dúvidas e é participativo. O seu lugar na sala foi muito inconstante, mudando frequentemente de lugar e de colega de mesa. Distrai-se com alguma facilidade. Sempre que possível procura ajudar os colegas com a anuência da professora.

Relativamente ao seu empenho, o Santiago frequentou muito poucas das aulas de apoio que eram disponibilizadas pela escola e revelou alguma dificuldade em apresentar os trabalhos de casa que eram solicitados.

4.5.2. Tarefa 1 (Anexo 1)

4.5.2.1. Questão 1

Perante a primeira situação, o Santiago não manifesta dificuldade em compreender o raciocínio proposto e responde quase instantaneamente que sim, que a Maria passou de ano, apresentando uma justificação correta (figura 95):

> Inv. – Sabe-se que a Maria passou de ano e perguntam-nos se recebeu uma prenda.
>
> Santiago – Sim. É verdadeiro, sim…
>
> Inv. – E porquê?
>
> Santiago – Porque é uma implicação. Se é uma implicação e se a primeira é verdadeira, para ser verdadeira a implicação o que está a seguir também não pode ser falso por isso tem de ser verdadeiro.

Quando a investigadora pede ao Santiago para registar a sua resposta ele questiona-a se o faz em linguagem simbólica ou em linguagem natural. A investigadora deixa ao critério do aluno usar a forma que considerar mais simples e o Santiago usa um misto das duas linguagens na sua resposta (figura 95).

O Santiago escreve $M \Longrightarrow P$ e a investigadora questiona-o:

> Inv. – O que é esse M e esse P?
>
> Santiago – Maria e Presente.
>
> Inv. – Só Maria?
>
> Santiago – Não… A Maria passar de ano.

A investigadora pede-lhe que escreva isso e o Santiago, utilizando a folha de resposta que engloba a tarefa, faz uma representação como se apresenta na figura 94:

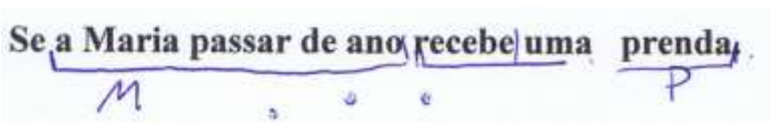


Figura 94 – Representação feita pelo Santiago

Após o diálogo o Santiago escreve a sua resposta (figura 95) sem necessitar de qualquer intervenção da investigadora.

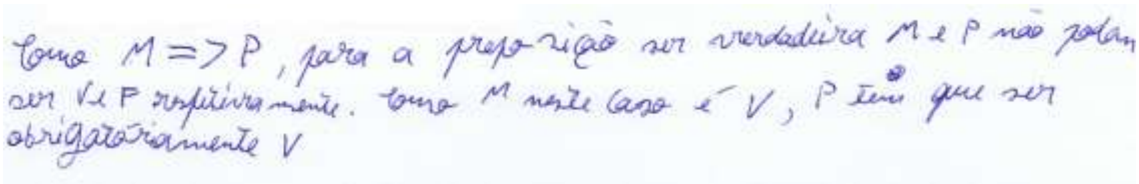

Como $M => P$, para a proposição ser verdadeira M e P não podem ser V e F respetivamente. Como M neste caso é V, P tem que ser obrigatoriamente V

Figura 95 – Resposta apresentada pelo Santiago para a questão 1 da tarefa 1

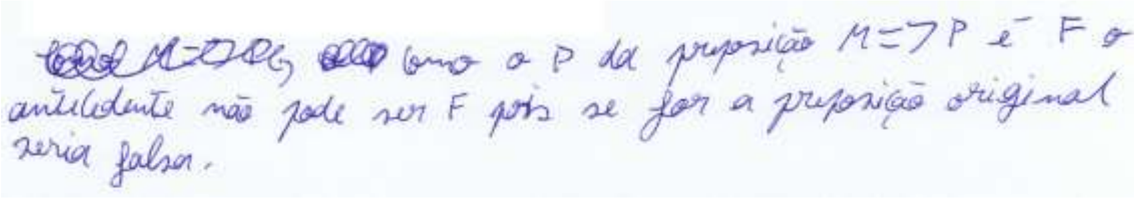
O Santiago não manifesta qualquer dificuldade ao analisar o raciocínio que lhe é apresentado. Aparentemente, o aluno sente necessidade de recorrer a ambas as linguagens (simbólica e natural) e identifica com facilidade que a proposição apresentada representa uma implicação, para a qual consegue estabelecer o valor lógico.

4.5.2.2. Questão 2

Mais uma vez, o Santiago não apresenta quaisquer dificuldades em responder e justificar o valor lógico da proposição que lhe é apresentada:

> Inv. – Na segunda situação… A Maria não recebeu uma prenda. Passou de ano ou não?
>
> Santiago – Não
>
> Inv. – Porquê?
>
> Santiago – Porque a… Como o P é falso… Porque se o P é falso e [se] o M for verdadeiro a proposição original ia ser falsa.

Analogamente ao que aconteceu na questão anterior, o Santiago escreve toda a sua resposta sem intervenção da investigadora e sem apresentar quaisquer dificuldades. Note-se que o Santiago verbaliza corretamente a sua justificação embora quando a concretiza no papel (figura 96) escreve que o antecedente não pode ser falso quando, na realidade, este tem mesmo de ser falso.



~~M⇒P~~, ~~...~~ Como o P da proposição M⇒7P é F o antecedente não pode ser F pois se for a proposição original seria falsa.

Figura 96– Resposta apresentada pelo Santiago para a questão 2 da tarefa 1

O Santiago não manifesta qualquer dificuldade quando desenvolve o seu raciocínio sobre a veracidade da afirmação feita, mas quando passa a sua resposta a escrito acaba por cometer um erro de escrita. Tal como se verificou na questão anterior, ele recorre novamente a ambas as linguagens (simbólica e natural), mas a explicação da resposta em linguagem natural levanta algumas dificuldades.

4.5.2.3. Questão 3

Na terceira situação, a resposta do Santiago também é imediata mas não contempla todas as dimensões que a resposta pode ter. Ele reformula a sua resposta e não apresenta dificuldades quando lhe é pedido para justificar o seu raciocínio:

Inv. – Agora… Sabe-se que a Maria não passou de ano.

Santiago – Não passou de ano também não recebe a prenda.

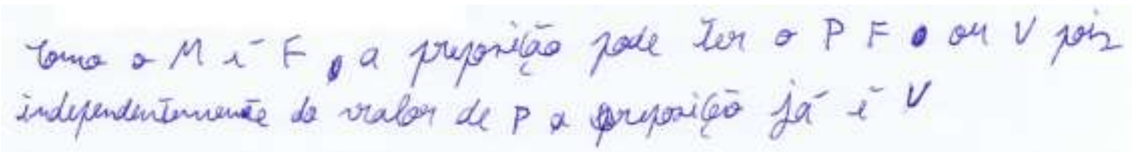
Inv. – Não?

Santiago – Então… A Maria não passou de ano é verdadeiro, quer dizer que é falso [aponta para M]. Pode receber ou pode não receber.

Inv. – Porquê?

Santiago – Não passou então o antecedente é falso. A implicação pode ter o valor lógico do segundo pode ser verdadeiro ou pode ser falso. Pode receber ou pode não receber.

Mais uma vez, o Santiago escreve toda a sua resposta sem intervenção da investigadora e sem apresentar quaisquer dificuldades.



Como o M é F, a proposição pode ter o P F ou V pois independentemente do valor de P a proposição já é V

Figura 97 – Resposta apresentada pelo Santiago para a questão 3 da tarefa 1

O Santiago produz uma primeira resposta baseada apenas numa análise direta da linguagem natural em que a proposição é apresentada, mas quando é questionado sobre a validade da sua resposta consegue associar a proposição à sua representação simbólica e aí completa o seu raciocínio sem dificuldade. Ele aparenta ter um bom domínio sobre as operações com a representação simbólica conseguido usá-la com base num pensamento proceptual.

4.5.2.4. Questão 4

Na última situação o Santiago faz um raciocínio análogo ao da questão anterior e responde sem dificuldade à questão que é colocada:

Inv. – Na última situação. A Maria recebeu uma prenda. Passou de ano, ou não?

Santiago – Sim, pode ter ou não passado, também…

Inv. – Porquê?

Santiago – Não, não, não… Recebeu uma prenda… Recebe uma prenda é verdadeiro. Sim. Porquê? Porque o P, como já é verdadeiro, independentemente do valor [do] antecedente, não vai tornar a proposição… a implicação falsa.

Tal como nas situações anteriores o Santiago revela um bom desempenho perante a tradução da proposição para linguagem simbólica e escreve toda a sua resposta sem manifestar dificuldades e sem intervenção da investigadora:

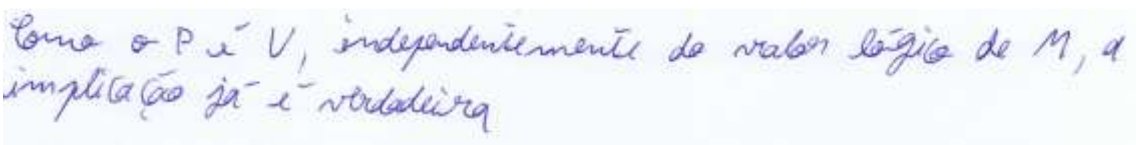


Figura 98– Resposta apresentada pelo Santiago para a questão 4 da tarefa 1

O Santiago não manifesta qualquer dificuldade desde que consiga traduzir a proposição para linguagem simbólica.

Em situações em que proposição é apresentada em linguagem natural e não apresenta uma resposta única ele prefere fazer a tradução para linguagem simbólica e raciocinar com base nessa representação.

Durante toda a resolução desta tarefa o Santiago nunca recorre a tabelas de verdade ou a outros procedimentos mais elementares o que denota ter desenvolvido um pensamento proceptual, sendo capaz de manipular os conceitos como proceitos. Esta capacidade pode encontrar-se na forma como ele manipula o valor lógico da implicação sem necessitar de refletir sobre quando esta é verdadeira ou falsa, consoante os valores lógicos do antecedente e do consequente.

4.5.3. Tarefa 2 (Anexo 2)

Para responder à primeira questão que é colocada na tarefa 2 o Santiago analisa as alternativas propostas, uma a uma, justificando de imediatamente que "a A não pode ser porque não é uma implicação" e se a proposição inicial tem um 'Se' então trata-se de uma implicação.

De seguida o Santiago analisa a proposição em linguagem natural e diz que "se ela não gosta de gelado, então isto [apontando para 'A Maria não gosta de gelado'] tem de ser *não q*". Analisa as opções B, C e D e como todas têm *não q* o Santiago analisa o segundo membro da implicação e verifica que tem um 'e' pelo que exclui as opções C e D, concluindo que a opção correta é a B.

O Santiago responde à questão dois escrevendo as suas justificações (figura 99) sem quaisquer dificuldades e sem pedir auxílio à investigadora:

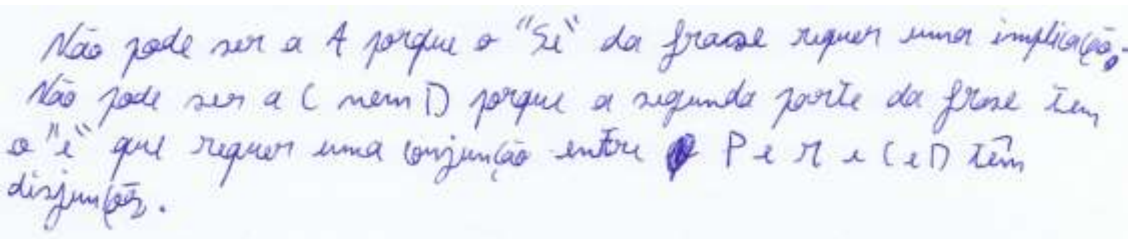

Não pode ser a A porque o "Se" da frase requer uma implicação.
Não pode ser a C nem D porque a segunda parte da frase tem o "e" que requer uma conjunção entre P e R e C e D têm disjunção.

Figura 99 – Justificações apresentadas pelo Santiago

Quando o Santiago acaba de escrever as suas justificações a investigadora questiona-o relativamente à opção C:

Inv. – Se na C tivesse um 'e' em vez de um 'ou'? Porque é que não podia ser? Ou já podia ser?

Santiago – Sim… Porque se implica uma coisa a outra também vai implicar a outra.

Inv. – Então $a\ implica\ b$ é o mesmo que $b\ implica\ a$?

Santiago – Se $a\ implica\ b$… Se implica uma coisa acho que também implica a outra… Sim. Acho que uma coisa implica a outra. Isto não interessa a ordem.

Inv. – Não?

Santiago – Acho que não.

A investigadora questiona o Santiago como é que pode verificar se as proposições são equivalentes, mas ele rapidamente diz que não são equivalentes e justifica-o dizendo:

Santiago – Numa implicação se o antecedente for verdadeiro e o outro for falso é falsa a implicação. Mas se for falsa de um lado e verdadeiro do outro já é verdadeira. Então esqueça. Uma coisa não implica a outra.

A investigadora questiona-o novamente, então, porque é que não poderia ser a opção C e o Santiago justifica corretamente dizendo que, nessa situação teria o antecedente e o consequente trocados.

De seguida a investigadora questiona-o relativamente à opção A, sobre a relação entre a disjunção e a implicação. O Santiago não se recorda como se faz a transformação de uma implicação numa disjunção (e vice-versa). Sabe que tem de negar uma das proposições mas não sabe qual. O aluno diz que "negamos o consequente" e a investigadora corrige a sua resposta e questiona-o se será negar o antecedente e manter o consequente. O Santiago concorda mas a investigadora questiona-o se será mesmo assim. Para responder o Santiago faz uma representação (figura 100) e concorda com a investigadora.

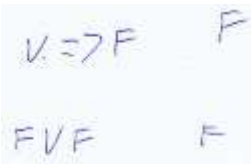


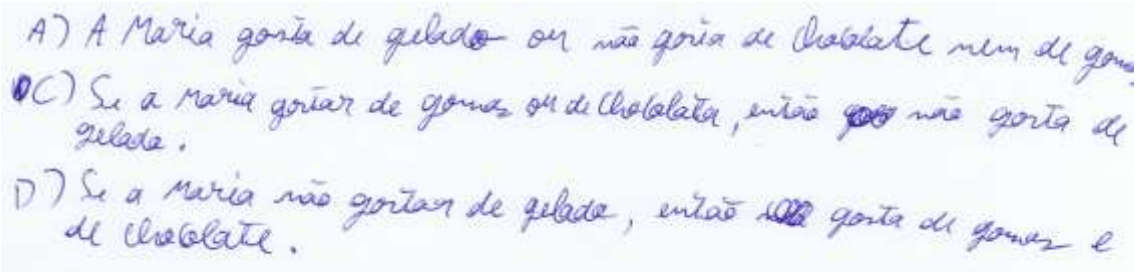
Figura 100 – Representação realizada pelo Santiago

O Santiago apenas escreve o caso em que $verdadeiro\ implica\ falso$ mas oralmente explicita os outros casos. Depois de confirmar que nega o antecedente e mantém o consequente faz a transformação sem dificuldades (figura 101) e diz que "então também dá”. Quando questionado pela investigadora se é o mesmo que tem em B o Santiago verifica que a negação deveria estar em r e não em p.


$q \vee (\sim p \wedge r) \qquad \sim q \Rightarrow (\sim p \wedge r)$

Figura 101 – Transformação da disjunção numa implicação feita pelo Santiago

A tradução para linguagem natural das restantes opções é feita pelo Santiago sem pedir auxílio à investigadora. O aluno não apresenta quaisquer dificuldades ao fazer essa tradução:


A) A Maria gosta de ~~gelado~~ ou não gosta de chocolate nem de gom

C) Se a Maria gostar de gomas ou de chocolate, então não gosta de gelado.

D) Se a Maria não gostar de gelado, então gosta de gomas e de chocolate.

Figura 102 – Traduções para linguagem natural realizadas pelo Santiago

Na tradução da linguagem natural para a simbólica o Santiago consegue encontrar a resposta correta, não porque fez a tradução simbólica da expressão que era dada em linguagem natural, mas porque foi procurando algumas discrepâncias nas opções que não representavam simbolicamente a expressão. Embora este processo resulte numa resposta correta o Santiago não analisa todas as opções globalmente nem se questiona sobre as propriedades que lhe permitem fazer transformações simbólicas. A tradução entre linguagens (natural e simbólica) parece estar reificada, já a utilização de algumas propriedades ou a relação entre implicação e equivalência ainda se encontram num estado de interiorização.

4.5.4. Tarefa 3 (Anexo 3)

Após a leitura das questões apresentadas na tarefa 3 o Santiago considera que os dois rapazes dizem a mesma coisa:

Santiago – Eles estão os dois a dizer a mesma coisa.

Inv. – Estão os dois a dizer a mesma coisa?

Santiago – Sim… Se a soma de dois números é par, o produto é ímpar, diz o Pedro e se o produto é ímpar, a soma é par, diz o António! É a mesma coisa. Eles estão a dizer a mesma coisa.

A investigadora pergunta ao Santiago se escolhendo quaisquer dois números, se a sua soma der par, também o produto dá par. O Santiago experimenta o caso 2 mais 2 e como tanto o produto como a soma dão par, considera que não é um bom exemplo. De seguida escolhe o exemplo 2 vezes 6 e vê que também a soma dá par e volta a insistir que está a "escolher exemplos maus".

Depois de o Santiago ter encontrado estes dois casos, a investigadora volta a questionar se quando a soma de quaisquer dois números é par o seu produto é ímpar e ele volta a responder que sim. O Santiago estava a tentar encontrar um caso que verificasse a afirmação pois não estava a compreender que, para a afirmação ser verdadeira tinha de se verificar para todos os casos em que a soma de dois números fosse par.

Quando retorna aos exemplos que apresentou anteriormente, o Santiago conclui que então a afirmação do Pedro é falsa. Quando tira esta conclusão diz que "estão os dois errados" pois continua a considerar que os dois rapazes estão a dizer a mesma coisa.

Inv. – Estão os dois errados?

Santiago – Sim, se estão a dizer a mesma coisa, estão os dois errados.

Inv. – E achas mesmo que estão os dois a dizer a mesma coisa?

Santiago – Sim! Se soma de dois números inteiros é par, o produto é ímpar. E o outro diz… Disseram a mesma coisa só que está invertido.

A investigadora recorre à primeira tarefa e analisa a quarta situação, relembrando o aluno que, conforme se afirma na primeira proposição, se a Maria passar de ano ela recebe uma prenda mas na quarta situação se verificou que o facto de a Maria receber a prenda não implica que tenha passado de ano (pode implicar, mas não obrigatoriamente). O Santiago conclui então que os rapazes não estão a dizer a mesma coisa porque "uma coisa não implica a outra".

Assim, a investigadora sugere ao Santiago que analisem cada uma das afirmações isoladamente. Depois de reler a afirmação do Pedro a investigadora volta a questionar o Santiago se esta é verdadeira ou falsa e o aluno conclui que é falsa pois há casos que não verificam a implicação. Na sua justificação o Santiago apenas refere que existem casos que não verificam a implicação, mas não apresenta nenhum concreto (figura 103):

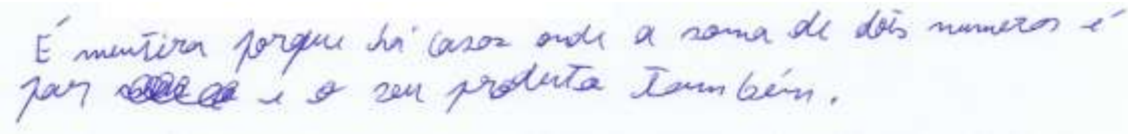

É mentira porque há casos onde a soma de dois numeros é par e o seu produto também.

Figura 103 – Resposta do Santiago à questão 1 da tarefa 3

Quando questionado em relação à veracidade da segunda afirmação apresentada, o Santiago revela-se bastante confuso:

Santiago – Há casos… 1 vezes 3 é 3 mas 1 mais 3 é 4. A soma deu par mas o produto deu ímpar. Então ele também está a dizer a verdade. Mas é só para alguns casos, não é todos.

O Santiago tenta encontrar casos de números cuja soma dê ímpar mas o produto não dê par:

Santiago – Por exemplo… 3… 3 vezes 9 é 27, mas depois dá 12 [a soma]. O que diz que ele está certo…

Inv. – Tu deste o exemplo do 3 e do 9. Chega?

Santiago – Não porque é só um caso específico. Não é para todos. Se eu conseguir arranjar um caso em que o produto é ímpar mas a soma é par…

Inv. – Então estás a dizer que podes fazer como na pergunta anterior? Arranjar um caso em que o produto é ímpar e a soma também é ímpar!?

Santiago – Sim. 3 vezes 3 é 9 mas 3 mais 3 é 6… Não, também é par… 9 vezes 9, 81 mas 9 mais 9 é 18… Eu não estou a encontrar casos. Mas espere, não mas… Se eu vir… Espere, não… Se eu vir que ele está… Ah, então… Eu acho que o António está a dizer é verdade. Os casos que eu estou a encontrar…

A investigadora confronta o Santiago com o facto de apenas ter encontrado três casos e ele diz que "é esse o problema". Quando questionado sobre a particularidade dos números para o produto dar ímpar, o Santiago diz que estes têm de ser diferentes:

Inv. – E não encontras nenhuma… Bem, ainda só usaste o 3 e o 9… Então, vamos lá pensar… Para o produto ser ímpar, o que é que tem de acontecer a esses dois números?

Santiago – Têm de ser diferentes.

Inv. – Diferentes? Então mas fizeste o 3 vezes 3 e…

Santiago – Ah, esqueça, esqueça. Então para ser ímpar…

A investigadora sugere os casos 2 vezes 2, 2 vezes 5 e 5 vezes 5 e o Santiago é capaz de concluir que para o produto ser ímpar os dois números multiplicados têm de ser também ímpares:

Inv. – Então há algum caso em que eu tenha um número par no produto e dê ímpar?

Santiago – Não porque assim estamos a multiplicá-lo um número par de vezes.

Inv. – Para o produto ser ímpar…

Santiago – O números têm de ser os dois ímpares.

A investigadora questiona o Santiago se a soma de dois números ímpares é sempre par. O Santiago concorda e justifica-o associando os números a caixas:

Santiago – Vai… Porque se eu juntar os que ficam de fora para fazer o par, vão formar algum par…

Inv. – Os de fora? Assim como?

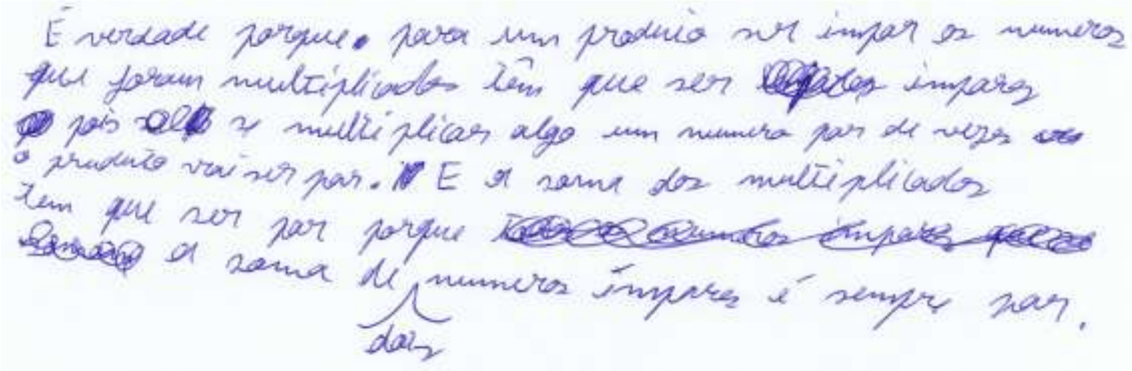
Santiago – Eu agora estava a pensar em caixas… Se cada número correspondesse ao seu próprio número mas de caixas…

Inv. – Então, por exemplo, o 5 são cinco caixas!?

Santiago – Sim… Para fazer par ia só fazer… Para termos um número par de caixas desse conjunto de cinco íamos ficar com quatro caixas mas ia ficar a última caixa de fora. Se juntarmos essa caixa de fora com outra caixa que está de fora dá par.

A investigadora pede ao Santiago que tente explicar o que acabou de dizer tentando usar linguagem matemática. A sugestão dele é que se considere uma variável que seja par. A investigadora questiona-o como garante que, por exemplo, um número a é par e o aluno justifica corretamente que este tem de ser divisível por 2 e dar um número inteiro e que portanto o a tem de ser da forma $2n$ (não indicando onde varia o n). Quando questionado qual a forma de um número ímpar, o Santiago não revela dificuldades em justificar que é da forma $2n + 1$.

O Santiago conclui, então, que estes “+1” que aparecem nos números ímpares são as “caixas que ficam de fora” e escreve a sua justificação (figura 104):



É verdade porque para um produto ser impar os numeros que foram multiplicados têm que ser impares pois se se multiplicar algo um numero par de vezes o produto vai ser par. E a soma dos multiplicados tem que ser par porque a soma de dois numeros impares é sempre par.

Figura 104 – Resposta do Santiago à questão 2 da tarefa 3

O Santiago apresenta muitas dificuldades na realização desta tarefa. Mesmo depois da discussão sobre a não equivalência de implicações recíprocas, o Santiago volta a considerar a existência dessa equivalência. Aparentemente ele não faz a tradução das proposições dadas para linguagem simbólica e isso impede-o de tomar uma decisão sobre a validade de poder comparar duas implicações cujas premissas são trocadas. A linguagem natural parece sobrepor-se não deixando espaço para um pensamento proceptual. Embora anteriormente ele tenha mostrado um bom desempenho na tradução entre as linguagens (natural e simbólica) o facto de o problema envolver uma maior complexidade faz com que essa capacidade seja relevada para segundo plano e ele acaba por privilegiar a linguagem natural.

4.5.5. Tarefa 4 (Anexo 4a)

Depois de ler o enunciado da tarefa 4, o Santiago diz que não é capaz de realizar a demonstração. A investigadora questiona-o como fazer este tipo de demonstrações e a resposta é que tem de ter "as duas partes iguais" e que para obter essa igualdade tem de simplificar o primeiro membro da equivalência.

O Santiago reconhece que tem de começar pelo que tem dentro de parêntesis [curvos] mas diz que tem de transformar a disjunção numa implicação.

Inv. – Neste tipo de demonstrações, qual era a primeira coisa que fazíamos?

Santiago – Determinar o valor lógico!?

Inv. – Não… Sem determinar valores lógicos… Até porque não sabemos os valores lógicos de a e b. Quando tínhamos implicações, conjunções, disjunções, … O que é que fazíamos primeiro?

Santiago – Pôr tudo igual?

Inv. – O que é que é tudo igual?

Santiago – Tudo com a mesma operação… Implicação ou disjunção ou…

(…)

Inv. – Então e interessa ter mais implicações ou menos implicações?

Santiago – Menos implicações… !?

Inv. – Diz-me tu… O que é que achas?

Santiago – Eu acho que podemos tirar a implicação, mas também podemos transformar isto [a implicação] numa conjunção.

Inv. – Conjunção?

Santiago – Sim, como aqui está [aponta para a disjunção].

Inv. – Isso é uma conjunção?

Santiago – Não, não, não… Disjunção. Enganei-me. Desculpe.

O Santiago confunde, diversas vezes, a conjunção com a disjunção. Quando questionado como transforma a implicação na disjunção, sabe que tem de negar o antecedente e manter o consequente mas apenas considera o b para o antecedente. Depois de a investigadora perguntar qual é o antecedente da implicação em questão o Santiago reconhece que o *não a* também faz parte deste.

Faz a transformação corretamente e aplica logo a Lei de DeMorgan, sem dificuldades (figura 105). Note-se que o Santiago escreve o segundo membro da equivalência mas não coloca os primeiros parêntesis entre as equivalências fazendo-o apenas depois de chamado à atenção.

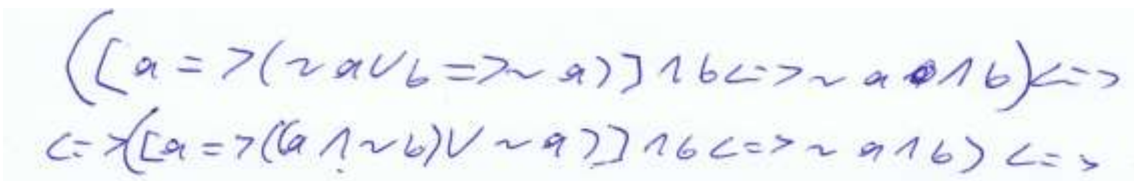


Figura 105 – Passos 1 e 2 da demonstração do Santiago

Perante esta expressão o Santiago reconhece que pode aplicar a propriedade distributiva. Apresenta algumas dificuldades pois não se recorda como fazê-lo. Depois de fazer uma analogia a um exemplo da propriedade distributiva do produto relativamente a adição, por sugestão da investigadora, o aluno é capaz de a aplicar corretamente ao caso concreto (figura 106):

Figura 106 – Passo 3 da demonstração do Santiago

O Santiago reconhece a expressão $a \vee\sim a$ mas diz que é falso. A investigadora pergunta se é falso e o aluno reconhece o erro pois está perante uma disjunção e portanto é verdadeira:

> Santiago – Vão dar valores diferentes, como é um ‘ou’ este vai dar verdadeiro.

O Santiago pretende simplificar logo a expressão $verdadeiro \wedge (\sim b \vee\sim a)$ sem concretizar esse passo no papel. Ele diz que $não\ b\ ou\ não\ a$ tem de ser verdadeiro porque está perante uma conjunção. A investigadora questiona porque é que esta expressão tem de ser verdadeira, mas o Santiago não apresenta uma justificação pelo que a investigadora pergunta o que resulta de “verdadeiro e qualquer coisa”:

> Inv. – Se tivermos verdadeiro e qualquer coisa, é equivalente a quê?
>
> Santiago – Não sei…
>
> Inv. – Se eu tiver verdadeiro e falso, dá o quê?
>
> Santiago – Verdadeiro. Não, não, não… É falso, é falso!
>
> Inv. – Então e se tiver verdadeiro e verdadeiro?
>
> Santiago – É verdadeiro.

Concluindo que o verdadeiro não tem influência no valor lógico da conjunção o Santiago simplifica a expressão dando continuidade à sua demonstração (figura 107):

Figura 107 – Passo 4 da demonstração do Santiago

Perante esta expressão o Santiago reconhece que pode passar a implicação a uma disjunção. Fá-lo sem dificuldade nesta fase. No passo 5 verifica quase imediatamente que pode aplicar a propriedade associativa por ter presentes duas disjunções (figura 108). O Santiago não refere a propriedade comutativa embora também a use.

$$\Leftrightarrow ([\sim a \vee (\sim b \vee \sim a)] \wedge b \Leftrightarrow \sim a \wedge b) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ([(\sim a \vee \sim a) \vee \sim b) \wedge b \Leftrightarrow \sim a \wedge b) \Leftrightarrow$$

Figura 108 – Passos 5 e 6 da demonstração do Santiago

Quando repara na expressão *não* a ou *não* a o Santiago refere que esta é falsa pois o valor lógico das duas proposições vai ser o mesmo:

> Santiago – Como o valor lógico [de $\sim a$ e $\sim a$] vai ser igual, numa disjunção, quando o valor lógico…
>
> Inv. – Então e se eu tiver falso ou falso ou se tiver verdadeiro ou verdadeiro…?
>
> Santiago – O valor lógico vai ser sempre falso.
>
> Inv. – Então, falso ou falso é falso. Verdadeiro ou verdadeiro é…?
>
> Santiago – Verdadeiro…
>
> (…)
>
> Inv. – Então nesse caso aí… *não* a ou *não* a…
>
> Santiago – Vai depender do valor lógico de a. Mas eu não se qual é o valor lógico de a.

A investigadora volta a frisar o facto de não interessarem os valores lógicos das proposições a e b e pergunta ao Santiago o que acontece se tiver uma disjunção entre duas proposições iguais. Dá um exemplo concreto:

> Inv. – Se eu disser “amanhã não vou ao cinema ou não vou ao cinema” ou se disser só “amanhã não vou ao cinema”, estou a dizer a mesma coisa?
>
> Santiago – Sim.
>
> Inv. – Então quando temos a ou a é equivalente a quê?
>
> Santiago – A a.

Depois de tirar esta conclusão, o Santiago é capaz de simplificar a expressão sem dificuldades. Imediatamente reconhece que pode aplicar novamente a propriedade distributiva, conforme fez anteriormente, e fá-lo corretamente (figura 109):

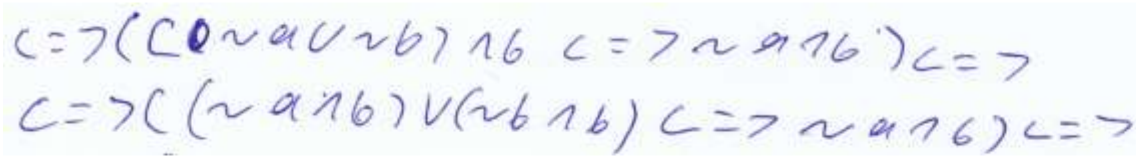


Figura 109 – Passos 7 e 8 da demonstração do Santiago

Perante esta expressão o Santiago conclui que *não* b e b é falso embora necessite de auxílio da investigadora:

> Santiago – Numa conjunção, o valor lógico… Para o valor lógico da conjunção ser verdadeiro têm de ter as parcelas com o mesmo valor lógico…
>
> Inv. – Se eu disser “está a chover e não está”…
>
> Santiago – Está a chover e não está é falso. Não… Sim… É falso.
>
> Inv. – Então numa conjunção quando tens um valor lógico e o seu contrário, se temos uma negação, uma delas vai ser…
>
> Santiago – Falsa.
>
> Inv. – Então vamos ter uma verdadeira e uma falsa. Certo?
>
> Santiago – Sim. Então é falso.

Verificando que tem o falso numa disjunção o Santiago conclui que o falso não tem influência pelo que depende apenas de $\sim a \wedge b$ concluindo assim a sua demonstração.

Figura 110 – Passo 9 da demonstração do Santiago

Na demonstração realizada aquando da realização do teste de avaliação (figura 111), o Santiago comete o mesmo erro que comete inicialmente na resolução da tarefa na entrevista (não coloca os primeiros parêntesis). Constata-se também que o Santiago não aplica corretamente a Lei de DeMorgan deixando na mesma uma disjunção ao invés de substituir por uma conjunção e também não aplica bem a propriedade distributiva, o que influencia a conclusão que o aluno tira. Não se pode considerar que o Santiago apresente um domínio absoluto das propriedades e procedimentos a aplicar para a realização de uma demonstração desta natureza mas é capaz de aplicar algumas propriedades e, inclusive, consegue identificá-las.

Na situação de entrevista o Santiago mostra-se desconfortável com a expressão que lhe é apresentada para provar a equivalência. Ele parece ter dificuldade em aceder a algumas propriedades que usou na resolução do teste o que pode sugerir que haja uma memorização de procedimentos que ele aplicou anteriormente, mas que agora já não consegue aceder. A compreensão manifestada pelo Santiago é essencialmente instrumental com recurso a um pensamento processual.

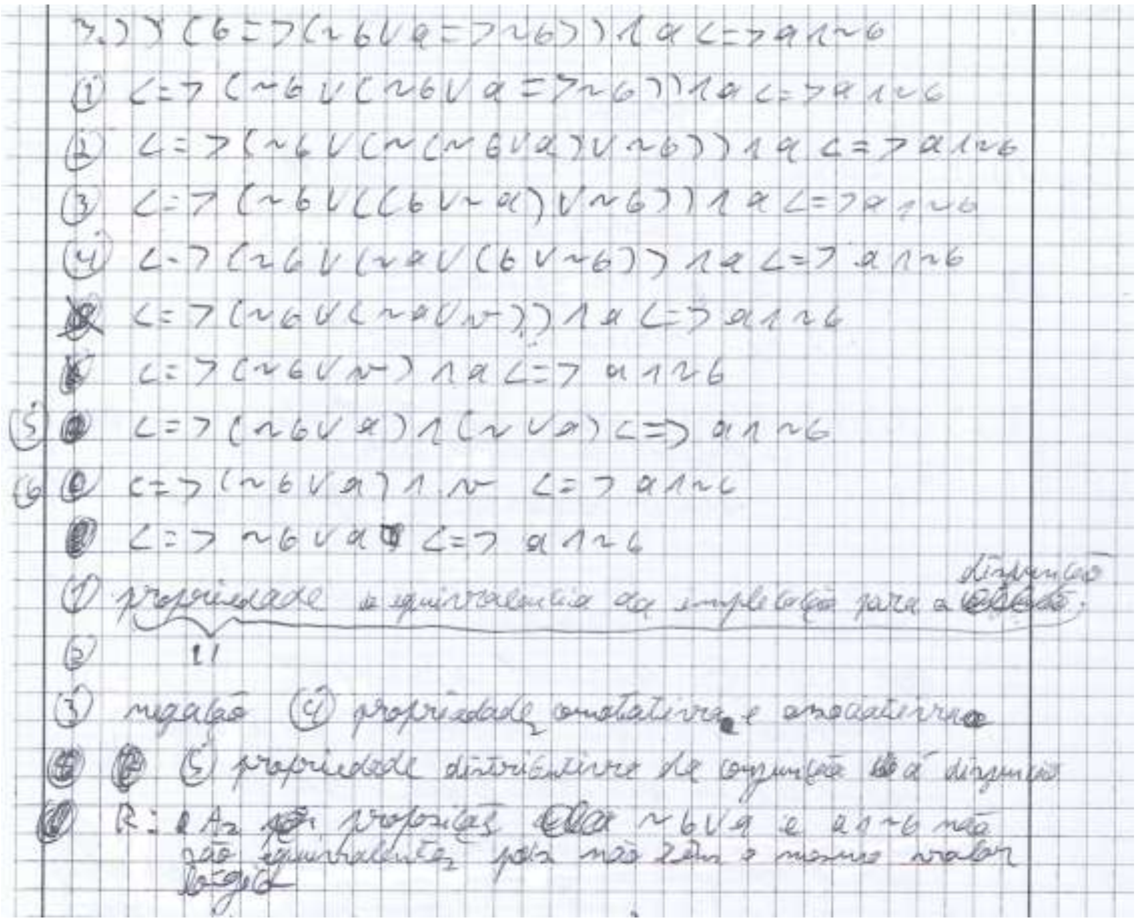


Figura 111 – Demonstração realizada pelo Santiago no teste de avaliação

5. Conclusões

Neste capítulo apresentam-se as conclusões após uma análise dos dados recolhidos. Numa primeira parte é feita uma categorização das compreensões dos conceitos, feitas pelos alunos e, numa segunda parte, responde-se às questões de investigação formuladas no início do estudo.

5.1. Categorização do Conceitos Imagem dos Alunos

Tendo em conta os três níveis da categorização propostos por Domingos (2003) referidos no capítulo 2 proceder-se-á à análise do desempenho dos diversos alunos tendo em consideração quatro aspetos: o domínio da linguagem natural, o domínio da linguagem simbólica, a tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica e a tradução da linguagem simbólica para a linguagem natural. No final apresenta-se uma tabela onde se sistematizam as categorizações dos alunos em cada um destes domínios.

5.1.1. Benedita

5.1.1.1. Domínio da Linguagem Natural

Quando confrontada com proposições que envolvem uma só operação e cuja solução decorre diretamente da execução dessa operação a Benedita é capaz de utilizar a linguagem natural sem manifestar grandes dificuldades, apresentando uma compreensão relacional e mostrando um bom domínio dos conceitos, podendo considerar-se que estes estão reificados ou foram capsulados com sucesso. No entanto, quando surge a necessidade de utilizar a linguagem natural em casos mais complexos que envolvem uma resposta não única ou mais do que um operador a Benedita revela algumas dificuldades apresentando uma compreensão instrumental dos conceitos. Neste contexto poderemos considerar que os conceitos em estudo ainda não estão completamente reificados, apresentando características de estarem num estado de condensação.

5.1.1.2. Domínio da Linguagem Simbólica

A Benedita é capaz de lidar com todas as operações com alguma destreza, embora tente evitar o seu uso. Apesar disso este uso revela-se benéfico para a sua compreensão dos conceitos em estudo. Quando está perante disjunções e conjunções, a Benedita é capaz de auferir o valor lógico das expressões apresentando uma compreensão relacional dos conceitos. Perante a implicação, em situações que envolvem mais do que um operador, apresenta algumas dificuldades revelando ainda uma compreensão instrumental e um raciocínio predominantemente processual. Relativamente à linguagem simbólica, a Benedita aparenta ter alguns conceitos reificados mas outros ainda se encontram na fase de condensação. É ainda possível verificar que durante o processo de entrevista ela melhora o seu desempenho conseguindo mesmo reificar alguns dos conceitos em estudo.

5.1.1.3. Tradução da Linguagem Natural para a Linguagem Simbólica

A Tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica é feita pela Benedita sem dificuldades, mesmo que a proposição em linguagem natural envolva diversas operações lógicas. Apesar disso a aluna tem tendência a trabalhar com a linguagem natural sempre que lhe é possível fazê-lo. A Benedita aparenta ter reificado os conceitos e consegue desenvolver um pensamento proceptual.

5.1.1.4. Tradução da Linguagem Simbólica para a Linguagem Natural

Também a tradução da linguagem simbólica para a linguagem natural se revela uma tarefa acessível para a Benedita uma vez que esta a realiza sem dificuldades, mesmo que as proposições sejam complexas por envolverem vários operadores. Apresenta uma compreensão relacional dos conceitos tendo-os capsulado de forma adequada.

5.1.2.Martim

5.1.2.1. Domínio da Linguagem Natural

O Martim domina, com desenvoltura, a linguagem natural e identifica com facilidade as implicações nas diversas proposições que surgem nas tarefas que lhe são apresentadas. Praticamente todas as suas justificações são apresentadas recorrendo à linguagem natural, no entanto ele apoia os seus raciocínios na linguagem simbólica recorrendo por vezes a procedimentos elementares com a realização de tabelas de verdade. O Martim revela alguma destreza na realização dos procedimentos e processos, o que lhe permitem uma compreensão relacional dos conceitos, mesmo quando se trata da resolução de tarefas com recurso à linguagem natural.

5.1.2.2. Domínio da Linguagem Simbólica

A manipulação de expressões simbólicas é feita pelo Martim sem quaisquer dificuldades. No entanto recorre diversas vezes a tabelas de verdade, o que se revela um procedimento eficaz para os raciocínios que desenvolve. O aluno revela-se à-vontade na utilização dos vários operadores estudados e é capaz de desenvolver um raciocínio demonstrativo sem recorrer a traduções simbólicas. O Martim desenvolve um pensamento proceptual tendo reificado os conceitos em estudo. Quando confrontado com a simplificação de expressões na forma simbólica, que envolvem vários operadores, ele mostra um desempenho bom, usando as propriedades das operações com compreensão, manipulando-as como objetos reificados, mas por vezes tem necessidade de recorrer aos procedimentos e processo mais elementares. Neste contexto pode inferir-se que o processo de capsular e descapsular os conceitos é eficaz para a solução das questões em estudo.

5.1.2.3. Tradução da Linguagem Natural para a Linguagem Simbólica

A Tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica é feita pelo Martim sem dificuldades, mesmo que a proposição em linguagem natural envolva diversas operações lógicas pelo que o Martim não revela quaisquer dificuldades na tradução de expressões em linguagem natural para linguagem simbólica apresentando raciocínios proceptuais e uma compreensão relacional.

5.1.2.4. Tradução da Linguagem Simbólica para a Linguagem Natural

O Martim não revela quaisquer dificuldades na tradução de expressões em linguagem simbólica para linguagem natural. Ele mostra um bom desempenho nesta tradução deixando antever que usa um pensamento proceptual na manipulação dos conceitos.

5.1.3 Matilde

5.1.3.1 Domínio da Linguagem Natural

A Matilde revela algum domínio da linguagem natural em situações simples, quando as proposições envolvem apenas um operador e a solução resulta da aplicação direta do operador. No entanto, quando as proposições envolvem vários operadores ou a proposição não tem uma resposta única e direta a Matilde não consegue separar a linguagem natural da que utiliza no senso comum. Neste sentido, mesmo quando as proposições são traduzidas para linguagem simbólica, revela muitas dificuldades no estabelecimento do valor lógico das proposições em estudo. O seu desempenho aproxima-se assim de uma abordagem procedimental dos conceitos denotando alguma interiorização no caso de conceitos mais elementares. Poderemos assim admitir que os conceitos apresentados em linguagem natural são predominantemente compreendidos de forma instrumental.

5.1.3.2. Domínio da Linguagem Simbólica

Em situações em que a linguagem natural se revele mais complexa, o recurso a linguagem simbólica aparenta ser uma mais-valia para a compreensão dos conceitos pela Matilde. No entanto, o manuseamento de expressões em linguagem simbólica revela-se uma tarefa complicada. A aluna revela ainda não ter condensado os conceitos de conjunção, disjunção e implicação apresentado dificuldades em auferir os seus valores lógicos em diversas situações. Nestes contextos a abordagem que desenvolve invoca conceitos imagem predominantemente incipientes. Quando se trata da manipulação de expressões simbólicas envolvendo vários operadores, a Matilde manifesta um pensamento de base processual, onde os objetos matemáticos que consegue manipular são elementares e a compreensão manifestada situa-se ao nível incipiente.

5.1.3.3. Tradução da Linguagem Natural para a Linguagem Simbólica

A Matilde revela muitas dificuldades em relacionar proposições em linguagem natural, que envolvam várias operações, com a sua representação simbólica. Nestes casos apresenta uma compreensão instrumental que por vezes se baseia em conceitos imagem incipientes. A coordenação entre a linguagem natural e simbólica é um processo que a Matilde ainda não conseguiu integrar, manifestando assim um pensamento processual.

5.1.3.4. Tradução da Linguagem Simbólica para a Linguagem Natural

Aparentemente, a Matilde tem mais facilidade em efetuar traduções da linguagem simbólica para a linguagem natural, mas o encadeamento de várias operações numa mesma proposição causa-lhe alguma perturbação nos seus raciocínios. A Matilde é capaz de traduzir expressões simples mas, quando a expressão se complexifica, revela uma abordagem instrumental na compreensão dos conceitos em estudo.

5.1.4. Salvador

5.1.4.1. Domínio da Linguagem Natural

O Salvador aparenta dominar a utilização da linguagem natural. Todas as justificações que apresenta recorrem, maioritariamente, a esta linguagem. Apesar disso, o Salvador revela algumas dificuldades em obter os valores lógicos nas representações em linguagem natural. Nos casos em que as proposições não apresentam uma solução única aumenta a dificuldade em dominar a linguagem natural. O Salvador revela assim uma compreensão instrumental dos conceitos que envolvem a linguagem natural podendo, no entanto, considerar-se que os processos que utiliza se encontram numa fase de condensação.

5.1.4.2. Domínio da Linguagem Simbólica

O trabalho de expressões em linguagem simbólica ainda se revela, para o Salvador, uma tarefa complexa mas, aparentemente é-lhe mais fácil estabelecer a validade das proposições quando estas se encontram em linguagem simbólica do que em linguagem natural. A abordagem que o Salvador desenvolve na simplificação de expressões simbólicas revela uma compreensão instrumental, conseguindo recorrer a procedimentos e processos que envolvem objetos matemáticos concretos, denotando assim que vários dos conceitos em uso estão numa fase avançada de condensação. O Salvador é capaz de auferir os valores lógicos da conjunção e da disjunção sem dificuldades, apresentando uma compreensão relacional do uso destes operadores. No entanto, relativamente à implicação, o desempenho baixa sobretudo quando se trata de situações que envolvem mais operadores pelo que o aluno ainda mostra estar numa fase de condensação dos conceitos não os tendo, ainda, reificado.

5.1.4.3. Tradução da Linguagem Natural para a Linguagem Simbólica

O Salvador aparenta não identificar a implicação nas primeiras proposições apresentadas embora o faça mais tarde. A tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica facilita a concretização das respostas dadas pelo Salvador. O aluno é capaz de fazer as traduções com facilidade apresentado raciocínios relacionais apesar de alguns conceitos ainda se encontrarem em fase de condensação como é o caso do trabalho com proposições que envolvam outros conceitos além da lógica.

5.1.4.4. Tradução da Linguagem Simbólica para a Linguagem Natural

O Salvador revela alguma dificuldade em realizar traduções da linguagem simbólica para a linguagem natural, principalmente quando o antecedente ou o consequente da implicação são proposições compostas. O Salvador revela não ter reificado a construção de conceitos baseados em operações lógicas, alguns dos quais se encontram ainda em fase de interiorização. Neste contexto ele apresenta uma compreensão essencialmente instrumental.

5.1.5. Santiago

5.1.5.1. Domínio da Linguagem Natural

O Santiago revela muitas dificuldades na compreensão das proposições quando estas se encontram em linguagem natural. É capaz de trabalhar com a linguagem natural quando se trata de uma proposição simples mas quando as proposições envolvem vários operadores ou o valor lógico não é único o Santiago apresenta raciocínios essencialmente processuais. Dado que ele recorre quase sempre à linguagem simbólica podemos considerar que no seu desempenho recorre predominantemente a conceitos imagem incipientes.

5.1.5.2. Domínio da Linguagem Simbólica

O Santiago aparenta dominar as operações quando estas integram uma representação simbólica simples conseguindo usá-las com base num pensamento proceptual e sendo capaz de manipular conceitos mais elementares como proceitos. No entanto, no manuseamento de expressões em linguagem simbólica, que envolvam vários operadores, a utilização de algumas propriedades ou a relação entre implicação e equivalência ainda se encontram numa fase de interiorização. O Santiago revela algumas dificuldades em auferir os valores lógicos da conjunção e da disjunção revelando a não reificação dos conceitos que se encontram ainda numa fase de interiorização.

5.1.5.3. Tradução da Linguagem Natural para a Linguagem Simbólica

O Santiago mostra-se confortável em realizar as traduções da linguagem natural para a linguagem simbólica, mesmo quando as proposições envolvem outros conteúdos matemáticos. Na tradução os conceitos aparentam estar reificados, apresentando o Santiago uma compreensão relacional dos mesmos.

5.1.5.4. Tradução da Linguagem Simbólica para a Linguagem Natural

Também a tradução da linguagem simbólica para a linguagem natural parece estar reificada e o Santiago não revela dificuldades em fazê-lo. O Santiago é capaz de efetuar raciocínios proceptuais, revelando uma compreensão relacional.

5.2. Sistematização das Conclusões

As categorizações dos conceitos imagem dos alunos são apresentadas na tabela 9, como base nas conclusões que se apresentaram anteriormente.

Tabela 9 – Categorização dos Conceitos Imagem dos alunos

	Domínio da Linguagem Natural	Domínio da Linguagem Simbólica			Tradução Linguagem Natural para Simbólica	Tradução Linguagem Simbólica para Natural
		Propriedades da Conjunção	Propriedades da Disjunção	Propriedades da Implicação		
Benedita	Instrumental	Relacional	Relacional	Instrumental	Relacional	Relacional
Martim	Relacional	Relacional	Relacional	Relacional	Relacional	Relacional
Matilde	Instrumental	Incipiente	Incipiente	Incipiente	Incipiente	Instrumental
Salvador	Instrumental	Relacional	Relacional	Instrumental	Instrumental	Instrumental
Santiago	Incipiente	Instrumental	Instrumental	Incipiente	Relacional	Relacional

5.3. Resposta às Questões de Investigação

Nesta seção pretende-se sistematizar as conclusões que foram apresentadas no tópico anterior procurando responder às questões de investigação apresentadas no início deste trabalho.

No que se refere à primeira questão, onde se pretendia saber que compreensão é que os alunos manifestam relativamente aos conceitos de lógica, abordados no currículo do 10º ano, podemos concluir que relativamente ao domínio da linguagem natural os alunos manifestam, maioritariamente, uma compreensão instrumental dos conceitos. No domínio da linguagem simbólica a maioria dos alunos manifestam uma compreensão relacional dos conceitos. No entanto, quando as questões se complexificam esta compreensão tende a ser mais baixa e por vezes também se situa no domínio instrumental. Relativamente à tradução entre as linguagens natural e simbólica os alunos apresentam, na maioria, compreensões relacionais.

Os alunos aparentam, na generalidade, ter compreendido os conceitos mais elementares de lógica abordados no currículo de Matemática A do 10º ano de escolaridade. Quando a complexidade desses conceitos aumenta, envolvendo em simultâneo outros objetos matemáticos, a compreensão baixa significativamente.

Relativamente à segunda questão, na qual se pretendia saber quais as representações privilegiadas na abordagem aos conceitos de lógica, verifica-se que tendem a recorrer bastante à linguagem simbólica uma vez que esta parece facilitar a sua compreensão. Também se verifica que o recurso a tabelas de verdade se torna eficaz para estabelecer proceitos elementares, facilitando o desempenho e a compreensão dos conceitos em estudo.

Quanto à terceira questão, na qual se pretendia saber qual o papel desempenhado pelo simbolismo na compreensão dos conceitos de lógica, conclui-se que este ajuda à compreensão, na medida em que os alunos são capazes de efetuar as traduções da linguagem natural para a linguagem simbólica. A manipulação dos símbolos pelos alunos é, por vezes, processual, sendo que as abordagens proceptuais são mais raras. É ainda de salientar que o recurso ao simbolismo permite aos alunos simplificar a linguagem natural e desta forma melhorar o seu desempenho na resolução de problemas desta natureza.

Na quarta questão pretendia-se analisar quais dificuldades que os alunos encontram na compreensão dos conceitos de lógica. Foram identificadas diversas dificuldades. Quando as proposições são complexas, envolvendo vários operadores e conceitos matemáticos diversos, os alunos revelam muita dificuldade em trabalhá-las em linguagem natural. A aplicação e identificação das propriedades na simplificação de expressões em linguagem simbólica também tendem a revelar-se um impedimento à concretização de demonstrações desta natureza.

6. Bibliografia

Aires, A. P. e Santiago, A. E. (2014). Os programas de Matemática do Ensino Liceal em Portugal. Em A. J. Almeida e J. M. Matos (Ed.), *A Matemática nos programas do ensino não-superior 1985-1974* (pp.69-92). Lisboa: APM.

Angulo, F. e Vásquez, R. (2003). *Introducción a Los Estudios de Casos*. Maracena: Ediciones Aljibe.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. e Weller, K. (2014). *APOS Theory - A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Cohen, L., Manion, L., e Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. London: Routledge.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingerdorf, K., Thomas, K. e Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de Conceitos Matemáticos Avançados – A Matemática no Início do Superior*. Tese de Doutoramento. Universidade Nova de Lisboa, Lisboa

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Em D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

AEAG – Agrupamento de Escolas António Gedeão, (2014). *Regulamento interno*.

AEAG – Agrupamento de Escolas António Gedeão, (2016). *Projeto Educativo*.

Evertson, C. M. e Green, J. L. (1986). Observation as Inquiry and Method. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 163-213). University of Michigan: Macmillan.

Flick, U. (2009). *An introduction to qualitative research.* Singapore: Sage Publications.

Fontana, F. e Frey, J. H. (1994). Interviewing – The Art of Science. *The Handbook of Qualitative Research*, 361-76. Thousand Oaks: Sage Publications.

Gardner, H. (2006). *Multiple Intelligences* - New Horizons. New York: Basic Groups.

Hoyles, C. e Küchemann, D. (2003). Student's Undestrandings of Logical Implication. *Educational Studies in Mathematics,51*, 193-223.

Matos, J. M., (2014). A matemática no Ensino Não-Superior. Em A. J. Almeida e J. M. Matos (Ed.), *A Matemática nos programas do ensino não-superior 1985-1974* (pp.13-36). Lisboa: APM.

McKenzie, W. (2005). *Multiple Intelligences and Instructional Technology*. Washington: International Society for Technology in Education (ISTE).

MEC – Ministério da Educação e Ciência (2001). *Programa de Matemática A - 10 ano*. Lisboa.

MEC – Ministério da Educação e Ciência (2014). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A*. Lisboa.

Nicholson-Nelson, K. (1998). *Developing Students' Multiple Intelligences*. New York: Scholastic.

O'Brien, T. C. (1973). Logical Thinking in College Students. *Educational Studies in Mathematics,5*, 71-79.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. Em J. C. Bergeron, N. Herscovics e C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education. PME-XI* (Vol. 3, pp.162-169). Montreal.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: On processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 59-84). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Sfard, A. e Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Londres: Flamer Press.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.

Spradley, J. P. (1980). *Participant Observation*. Orlando: Harcourt Brace Jovanovich.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (2003). *Concept image and concept definition*. Em David Tall Home Page. [Acesso electrónico em 11 de fevereiro de 2016]. Disponível: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html

Tall, D. (2006). *Procepts*. Em David Tall Home Page. [Acesso electrónico em 11 de fevereiro de 2016]. Disponível: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/procepts.html

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 2008, 20 (2), 5-24.

Tall, D. (2013). Three Worlds of Mathematics. Em David Tall Home Page. [Acesso electrónico em 11 de fevereiro de 2016]. Disponível: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/three-worlds.html

Tall, D. e Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Vinner, S. e Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 356-366.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action*. Hempstead: Harvester Wheatsheaf.

http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/p24.html (2016)

http://www.alea.pt/ (2016)

http://www.concurso-de-pangea.com.pt/ (2016)

http://www.m-almada.pt (2016)

7. Anexos

Anexo 1 – Enunciado da Tarefa 1

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ANTÓNIO GEDEÃO - 170940
Escola Secundária António Gedeão

TAREFA 1

NOME:____

Considere a seguinte proposição verdadeira: **Se a Maria passar de ano recebe uma prenda.**

1. Sabe-se que a Maria passou de ano.
   A Maria recebeu uma prenda?

2. Sabe-se que Maria não recebeu uma prenda.
   A Maria passou de ano?

3. Sabe-se que a Maria não passou de ano.
   A Maria recebeu uma prenda?

4. Sabe-se que a Maria recebeu uma prenda.
   A Maria passou de ano?

Adaptada de O'Brien (1973)

Anexo 2 – Enunciado da Tarefa 2

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ANTÓNIO GEDEÃO - 170940
Escola Secundária António Gedeão

TAREFA 2

NOME:____

Considere as seguintes proposições:

p : "A Maria gosta de chocolate."

q : "A Maria gosta de gelado."

r : "A Maria não gosta de gomas."

1. Qual das seguintes expressões é a tradução simbólica da proposição:
"Se a Maria não gosta de gelado, então gosta de chocolate e de gomas"?

(A) $q \vee (\sim p \wedge r)$

(B) $\sim q \Rightarrow (\sim r \wedge p)$

(C) $(\sim r \vee p) \Rightarrow \sim q$

(D) $\sim q \Rightarrow (\sim r \vee p)$

2. Explique o que o leva a rejeitar cada uma das opções.

3. Traduza as restantes opções em linguagem natural.

Adaptada do teste realizado no dia 29 de outubro de 2015

Anexo 3 – Enunciado da Tarefa 3

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ANTÓNIO GEDEÃO - 170940
Escola Secundária António Gedeão

TAREFA 3

NOME:____

O Pedro e o António estão a pensar sobre os números 3 e 11.

Repararam que a soma é par e que o produto é ímpar.

O Pedro disse: Se a soma de dois números inteiros é par, então o seu produto é ímpar.

O António disse: Se o produto de dois números inteiros é ímpar, então a sua soma é par.

a) O que o Pedro disse é verdade? Explique.

b) O que o António disse é verdade? Explique.

Adaptada de Hoyles e Küchemann (2003)

Anexo 4 – Enunciado da Tarefa 4a

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ANTÓNIO GEDEÃO - 170940
Escola Secundária António Gedeão

TAREFA 4a

NOME:____

Sejam a e b duas proposições. Demonstre a seguinte equivalência:

$$[a \Rightarrow (\sim a \vee b \Rightarrow \sim a)] \wedge b \Leftrightarrow \sim a \wedge b$$

Retirada do teste realizado no dia 29 de outubro de 2015

Anexo 5 – Enunciado da Tarefa 4b

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ANTÓNIO GEDEÃO - 170940
Escola Secundária António Gedeão

TAREFA 4b

NOME:____

Sejam a e b duas proposições.

1. Justifique a veracidade da seguinte equivalência: $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \sim a \vee b$

2. Demonstre as seguintes equivalências:
   a. $\sim a \vee b \Rightarrow \sim a \Leftrightarrow \sim a \vee \sim b$

   b. $a \Rightarrow \sim a \vee \sim b \Leftrightarrow \sim a \vee \sim b$

   c. $(\sim a \vee \sim b) \wedge b \Leftrightarrow \sim a \wedge b$

Adaptada do teste realizado no dia 29 de outubro de 2015

Anexo 6 – Enunciado da Tarefa 4c

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ANTÓNIO GEDEÃO - 170940
Escola Secundária António Gedeão

TAREFA 4c

NOME:____

Sejam a e b duas proposições. Demonstre a seguinte equivalência:

$$[a \Rightarrow (\sim a \vee b \Rightarrow \sim a)] \wedge b \Leftrightarrow \sim a \wedge b$$

$[a \Rightarrow (\sim a \vee b \Rightarrow \sim a)] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [a \Rightarrow \sim (\sim a \vee b) \vee \sim a] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [a \Rightarrow (a \wedge \sim b) \vee \sim a] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [a \Rightarrow (a \vee \sim a) \wedge (\sim b \vee \sim a)] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [a \Rightarrow \sim a \vee \sim b] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\sim a \vee \sim a \vee \sim b] \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b) \wedge b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b \wedge \sim a) \vee (b \wedge \sim b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim a \wedge b$

Adaptada do teste realizado no dia 29 de outubro de 2015